S. 1142 A.

MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA

TOMO II. PARTE I.

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXIV.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

ELOGIO
DI GIUSEPPE TORELLI
Scritto
Dal Sig. Cavaliere PINDEMONTE.

SE felice veramente è quel letterato, a cui uno ſtudio costante delle ſcienze aſtratte non eſtinſe il guſto per l' arti le più gentili, che le pagine d' Omero ha così ſpeſſo tra mano come quelle di Newton, e del quale torna proprio ugualmente e lo ſcuoprire la natura d' una curva, e il produrre l' incanto amabile della poeſia, noi diremo che fu felice il Torelli, di cui ſcriviamo l' Elogio, e che poſſedette tutto quel bene, cui lice in terra aſpirare, e neceſſario anch' eſſo a coſtituire il carattere d' una vita celebre e rara, quale venir ſuole dalla ſavia antichità per modello rappreſentata. Perciocchè nè mancò a lui la virtù, nè l' oſſervanza della religion ſua, nè la cara ſalute, parte anch' eſſa eſſenzialiſſima della umana felicità; ed ebbe, in giuſta equazione de' ſuoi deſiderj, que' due che molto fra gli eſterni beni riſplen-

dono, le belle ricchezze, e la fama, ch' è certo ancora più bella. Una tal vita ben meritava di venir posta sulle carte, ed anche di venir posta su quelle, che dalla *Società Italiana* son pubblicate. Egli era membro di questa: quindi, appunto perchè non fu a tempo di affaticarsi per essa, crede aver più ragione la *Società* di lagrimarne la perdita, e lo fa pubblicamente, amando di premiare anche le ottime volontà de' suoi membri, e stimando di onorar nel Torelli se stessa. Quantunque poi s'occupi solamente delle scienze gravi, gode se alcuno si distinse ancora nelle lettere belle, e vuole che per queste eziandio venga qui celebrato, e perchè non si defraudi alcuno della debita lode, e perchè non rifiuta la compiacenza di far vedere, che possiede ne' suoi quelle ricchezze ancora, di cui ella non usa.

Giuseppe Torelli nacque in Verona lì 3. Novembre dell' anno 1721. Luca fu il padre, negoziante di fortuna mediocre, e la madre Angela Albertini Veneziana, donna di più che mediocre indole, e colta oltre l' usanza del sesso a que' tempi: a lei confessava il Torelli di dover tutto, rimasto privo del padre in tenera età; essa gli diede l' educazion prima; e fatto adulto nel Collegio il pose qui retto allora da' PP. Somaschi, poscia in casa de' dotti fratelli Ballerini, e finalmente, sapendo con amor coraggioso e vero privarsene, all' Università di Padova lo mandò. Terminati appena suoi studj, parve subito ciò ch' esser dovea, e ch' io qui dichiaro: dico che mostrò subito un certo senso dell' ottimo in ogni cosa, un' anima armonica e veramente geometrica, ma nel tempo stesso di finissima e dilicatissima temperatura; onde l' amor del bello non meno che il bisogno del vero, ed il fior del gusto e la squisitezza del tatto non men che il sapore della proporzione e del retto; ciò in fine che mi piace comprendere nelle sole parole *senso dell' ottimo in ogni cosa* a lui naturale, e colla buona disciplina perfezionato: dal quale

condotto venne per la difficile carriera delle lettere, e per la più difficile della vita, di cui parlerò dopo, ma brevissimamente, perchè non trattasi qui che dell' uom letterato. Dissi che questo senso di perfezione mostrò sin d' allora, perchè gli uomini primarj di Padova a quel tempo, i Morgagni, i Pontedera, i Poleni, i Dandini, i Volpi, ed i Facciolati non solamente ammiravano in lui un giovinetto che molto di sè promettea, ma eziandio accarezzavano un consigliero sagace, cui potevano negli affari delle lettere interrogare. Del che fa prova saper che il Morgagni leggeva a lui nella stanza quelle orazioni che poi dovea dalla cattedra recitare; come fa testimonio dell' altro veder che il Dandini compiacquesi d' indirizzargli per via d' epistole una sua opera, chiamandolo pieno di erudizione e di dottrina in una età che gli altri si dispongono ad esserlo, e per cui vedesi che la buona coltura non gli fu men primaticcia del buon giudizio.

Ripatriato, pare che solo delle belle lettere ornasse quegli anni primi, ma non già come s' usa oggidì; perocchè esercitavasi nel latino sermone, coltivava il greco, amoreggiava l' ebraico, avvicendando il severo e l' amenità, e nutrendo i fiori del gusto colla sostanza del buon sapere. Frutto primiero di questi studj fu la versione latina, non però mai pubblicata, di quell' aureo libretto greco di morale, più utile e grande che trattati molti non sono di tale scienza, e libretto d' ogni età, d' ogni sesso, d' ogni nazione e d' ogni secolo, *gli apologhi di Esopo*; i quali vestire della più casta latinità, e fregiar volle di note opportune e di prefazione erudita, formandone un elegantissimo volumetto, non men che riguardo al costume, profittevole ai giovani rispetto alla lingua, la quale, non men che quello secondo i Teologi, vassi ora più sempre secondo i Grammatici corrompendo. E del tempo medesimo, e non meno saporiti e ben prosperati sono altri frutti di gentile letteratura, di cui tosto ragiono.

Tra' greci scrittori a sè particolarmente lo trasse Luciano, dalla conversazione del quale partì egli dopo averne non pur gustati, ma in sangue convertiti que' pensamenti, e fatto una eleganza sua propria di quelle graziosità. Testimonio ne sono tre Dialoghi ed una Esercitazione accademica. Ha questa per titolo *Sogno di Giacomo Pindemonte*; e si tratta di persuadere il coltivamento delle lettere ad un giovinetto inclinato più a quello delle armi, singendosi che due donne vegga in dormendo, la Milizia, e la Letteratura, ambedue desiderose di possederlo, ed i suoi comodi e beni vantando ciascuna: il tutto non che preparato alla maniera de' Greci, ma di sapore, greco veramente, condito. I Dialoghi poi, latini pur essi, e stampati senza nome in Colonia, due portano in fronte *Del principale incomodo della gola e del suo rimedio*, l' altro è sulla dottrina in generale del *Probabilismo*, dottrina che allor più che mai facea perdere il tempo ai Teologi dell' Italia. Ciascun sa quanto torni opportuno lo stile del dialogo, ove piaccia vestir di ridicolo le cose più gravi, o che tali son riputate: ma quanto anche non è malagevole il conseguirne la semplice ed insieme varia andatura, i motti improvvisi e nulla meno naturali, e quella piccante, e nobile a un tempo ed ingenua giocondità che tutto dee rallegrarlo? o io m' inganno, o questi Dialoghi non sono nel genere loro meno eccellenti delle celebri Lettere Provinciali: pratica somma di que' cortesi e condiscendenti Casisti, saviezza, temperanza e disinvoltura nel farne uso, le grazie innocenti a tempo, a tempo le grazie pungenti, facile tessitura e variata, gemme di lingua le più lustranti, e il garbo per ogni dove e la urbanità. Diede anche pruova del suo profitto nella ebraica lingua con una Dissertazione latina indiritta sotto forma di lettera al Marchese Maffei, e contenente parecchie comparazioni tra l' ebraico libro dell' Esodo, e la greca interpretazion dei Settanta. S' oppose a que-

ſta operetta il P. Carmeli reputato Profeſſore a quel tempo in Padova di lingue orientali, ſoſtenendo eſſer coſa pericoloſa ed audace e quaſi ſacrilega il por mano ſenza neceſſità ed autorità nell' ebraico teſto dietro le riprovate traccie di Riccardo Simone, del Clerc, e di Lodovico Capello: ma condannando l'aſſunto, l'ingegno per altro del giovine Critico commendò. Comunque ſia riguardo al primo, ci contenteremo di dire quanto al ſecondo, che ſolo ancora in que' pochi paſſi diede a divedere abbaſtanza, quanto ſarebbe nella ſacra filologia proceduto, ove continuato aveſſe a darci opera, e quando mancati non gli foſſero i libri neceſſarj, maſſime quelli de' Proteſtanti, de' quali i paeſi cattolici, e maſſime l'Italia, per non dir che il vero, ſcarſeggia. E qui mi piace notare che queſti lavori ſon piccioli, è vero, di mole; ma la finitezza e perfezion loro, come fa onor grande all' Autore, così la mia cura giuſtifica in ricordarli.

Benchè però coltivaſſe in quegli anni le più dolci arti ſingolarmente e la filologia, tanto è però lungi che traſcuraſſe le ſcienze e le arti più gravi, che ſappiamo anzi che addottorato a Padova in legge, ſebben non l'abbia mai profeſſata, molto vi applicò nondimeno in quella ſua giovinezza, e appare da lettere ſcritte a lui, che due Diſſertazioni, indarno poi ricercate tra le ſue carte, ſteſo egli aveſſe ſu propoſiti importanti aſſai di giuriſprudenza. Ma nè queſta con tutte le altre ſcienze che dette ſon metafiſiche, nè la fiſica ſteſſa che ſpeſſo, tolta univerſalmente, o ci laſcia anch' ella nelle tenebre, o le dirada per laſciarci poi, com' è de' lampi notturni, in anche maggiore oſcurità, potea contentare uno ſpirito di contentatura in tutte le coſe difficiliſſima, la qual non naſce che da quel ſenſo di perfezione ſopraindicato, e dal quale venía propriamente coſtretto a non ſi appagare che di quel vero ſol degno del nome, come non ſi acquetava nella poeſia ed oratoria che a quel puro bello e perfetto, che

può dirſi il vero delle buone arti . Quindi abbracciar dovea di neceſſità le matematiche , e quelle ſingolarmente che diconſi pure , le quali poi ſempre aggiogò colle belle lettere giudicate per lui non men vere appunto di quelle nell' eſſer loro , perchè ſicure di conſeguire in mano di chi trattarle ſappia il lor fine , o con dilettar l' intelletto , o con iſvolgere la volontà. E però egli era ſolito lodar particolarmente queſti due ſtudj , e raccomandarne il coltivamento ; e per quella opinione , che anch' ei tenea , foſſe quaſi un perder l' opera e il tempo in parecchj altri , e per un diletto naturale di vedere in conſiderazione ed in pregio ciò che ſi pregia e conſidera, diletto che torna in lode, perchè ſol cade in coloro che di oſcurare non temono all' altrui luce: molto più che conceſſo è a pochi nodrire ſotto un medeſimo tetto, e congiunti d' amicizia due ſtudj non tanto forſe nemici di lor natura , quanto creduti tali perchè rare volte , e quindi con maggior vanto di chi gli uniſce, inſieme convengono.

Per la medeſima ragione poi, che tra le ſcienze avea ſcelto le matematiche , eleſſe tra queſte l' antica geometria , e fece poi ſempre le delizie ſue di quel metodo, che per la diligenza a guidarci di paſſo in paſſo, e per quel lume che ſparge ſu la via tutta , dovea ſingolarmente allettarlo ; e come l' anima ſua non era meno gentile che geometrica, è il veder facile quanto in ciò pure amar doveſſe gli antichi , di cui fu ſempre grandiſſimo oſſervatore , e nelle dimoſtrazioni de' quali la preciſione ed il rigore vanno a maraviglia del pari colla ſemplicità ed eleganza . Rivolſe l' animo da principio anch' egli a quel metodo che per altri pregi riſplende e tanto tiene ora, veduti ch' egli ebbe quegli elementi di geometria , che moſtrare ſi ſogliono nelle ſcuole ; ma poi mutò di conſiglio. Perchè avvenutoſi in Vicenza con dotto Matematico che lo avviſò di volgere addietro per rifar meglio la

ſtrada

ſtrada che corſa avea, e forſe anche ricordatoſi di Newton, che ritornò ſui Geometri antichi da lui troppo toſto per l' amor dell' Algebra abbandonati, preſe a ſtudiare di nuovo Euclide, ma in Euclide medeſimo, ſecondo il detto dello ſteſſo Newton; e queſto fece cogli altri tutti e ſingolarmente con Archimede, di cui tanto invaghì, che gli tenne poi ſempre la più irreprenſibile fedeltà. E quanto a Euclide, come riſo avea prima di sè, così degli altri era ſolito ridere che ſui moderni libri lo ſtudiano, e di quegli Autori che preteſero riordinarlo, rompendo quella catena mirabile di propoſizioni che paſſano neceſſariamente dall' una nell' altra, e che formando un ordine, di cui non può darſi il più nobile, formano inſieme la delizia degli amatori del rigor geometrico; rigore, che ſolo può vincere uno ſpirito riſoluto di non ſi dare che all' evidenza. Ma queſto è il vezzo comune ora di agevolare la ſcienza debilitandola; al che non poco contribuiſce quella nazione, per altro illuſtre e grandiſſima, e non mai lodata abbaſtanza che fa di aſſicurarſi in tal modo la da lei affettata univerſale monarchia nelle lettere, e che inſegna ad abbandonare le lingue antiche per far parlare alle ſcienze la propria ſolo: mentre la ſua rivale aſpira tuttavia ad una gloria negli ſtudj men rilucente, ma più ferma e più dai ſavj ammirata; e le antiche lingue coltiva, ed ancora conſerva il guſto della ſevera geometria.

Primo ſaggio di queſti ſtudj nel noſtro Torelli fu l' ingegnoſo trovato d' una macchina idraulica, ſpiegata molto ſemplicemente ed elegantemente con Lettera latina al Marcheſe Poleni indiritta; e trattaſi d' una ruota girante ſotto acqua, ed utile in queſto che non riſtarebbe, come le altre, ſempre che i fiumi o per le pioggie autunnali, o per la neve ingroſſano di primavera. E' noto che per due cagioni ſtarebbe; o mancando la forza impulſiva, o la ſteſſa forza ugualmente in ogni ſua parte operando. Queſt' ultimo accade nella ruota ſotto acqua; perchè quantunque ſia vero che le acque correnti

non muovano e ſopra e ſotto d' un corſo eguale, pur non è quella diverſità che baſti a rivolgerla. Per far dunque che la forza delle acque non così operi nella ſuperior parte della ruota come nella inferiore, ſpezzò i raggi di quella in due parti, ond'è che gl' inferiori compongon ſempre una retta, due rette i ſuperiori fatti per una ſpecie di contrazione più brevi; e però volgendo la ruota, ciaſcun raggio cade pel proprio peſo, e torna dall' una parte intero di rotto, e rotto d' intero dall' altra, ciaſcuno raggio allungandoſi o contraendoſi con perpetuo ed equabile avvicendamento.

Dopo queſta Lettera pubblicò egli un tratto geometrico in lingua italiana col titolo *Scala de' meriti a capo d' anno*; imitando con queſto il Leibnizio, di cui pure lo ſcioglimento d' un bel problema a mercatura pertinente negli Atti abbiamo di Lipſia. *Merito* ſi chiama preſſo i mercatanti quel frutto, che da un capitale ci viene prodotto in un dato tempo; e *merito a capo d' anno* quello che ſebben prodotto equabilmente per tutto l' anno, pur ſolo in fine dell' anno ſteſſo dimandaſi intero. Ma ſuppongaſi, dice l' Autore, che ſe ne dimandi fra l' anno ſenza l' altrui pregiudizio una qualche parte: qual ſarà ella? Ora per iſciogliere queſto problema baſta conſiderare che il dimandarſi per patto intero un tal merito ſolamente in fine dell' anno non altro importa, ſe non che nel giro d' un anno nulla oltre lo ſteſſo può ricavarſi: ond' è manifeſto che in altro modo dee concepirſi prodotto, dimandandoſi in fine dell' anno, ed in altro modo, dimandandoſene fra l' anno una parte. Nel primo caſo dee concepirſi prodotto dal ſolo capitale, nel ſecondo e dal capitale e da quella parte, qualunque ſiaſi, che fra l' anno ſe ne dimanda. Queſta parte adunque, che nel tempo traſcorſo ſi vuol ſupporre eſſere ſtata dal capitale prodotta, dee eſſer tale che unita a quella tale altra, cui può produrre pur colla ſteſſa legge nel tempo, che riman da traſcorrere, il predetto ca-

pitale, della ſteſſa accreſciuto, adegui preciſamente l' intero merito. Le quali parti, o ſia meriti parziali volendo generalmente determinare, ricorre l' Autore ad una curva, le cui dimenſioni e proprietadi a dimoſtrar tolſe, e che appunto è la ſcala ſopraindicata. Il problema è da tenerſi in pregio non lieve e per l' uſo che nella vita civile ſe ne può trarre grandiſſimo, e perchè ſciolto con quella nitidezza e perſpicuità tutte proprie del noſtro Geometra.

Ma benchè l' Autor noſtro coltivaſſe ſtudioſamente ed acremente ſoſteneſſe la ſinteſi degli antichi, meritò per altro aſſai bene della moderna analiſi; e ciò, tentando di traſportare il rigore e la certezza dell' antica geometria nella più ſublime e più utile parte di quel metodo: dico nel calcolo infiniteſimale. La idea, che delle infiniteſime quantità reca il Wolfio ne' ſuoi Elementi, rappreſentandole quali quantità incomparabili alle più grandi, a quel modo che un granello d' arena incomparabil ſi dice riſpetto a un monte, come non può certamente alcuno ingegno matematico, per indulgente ch' ei ſia, tranquillare, così agitare dovea ſommamente colui che alla ſana indole dello ingegno aggiungea la rigida educazione dell' antica geometria. Cominciò pertanto a meditare, giuſta il penſamento proprio, ſulle quantità infiniteſime. Le conſiderò egli quali differenze che a poco a poco giungono ad annichilarſi, e nell' atto dell' annichilamento fanno che certe relazioni tra d' altre ſuſſiſtenti linee a verificare ſi vengano; e conſiderò inſieme che avendo gli Analiſti diſtinto due calcoli, l' uno per le quantità poſitive, per le negative l' altro, eſſere ci dovea un calcolo ancora pel Niente poſto all' une e all' altre di mezzo. Dietro codeſte tracce avviſò non altro eſſere il calcolo degl' infiniteſimi, che il calcolo del Niente tra le poſitive e le negative quantità collocato, ſebbene con altri riguardi, e di ſotto ad altra ſembianza da' primi Autori ſuoi inſtituito. Ma un annientamento traente

ſeco la verità di relazioni che prima non erano, non è già un nulla che meriti d' eſſer confuſo col nulla metafiſico ed aſſoluto; il perchè trovoſſi egli neceſſitato a caratterizzarlo col titolo di Nulla geometrico, e queſto titolo a porre in fronte d' una ſua opera latina, diviſa in due libri, nel primo de' quali ſe ne riſchiara la natura, nell' altro l' applicazione ſe ne dimoſtra. In quello, come queſto Niente ſi formi, come a varj ordini ſalga, come ſopra eſſo adoperare ſi debba vien ragionato, e la ſottigliezza dell' ingegno particolarmente riſplendevi; come pompeggia la induſtria nel libro ſecondo, ove contienſi l' applicazione, ed ove d' ogni ſpecie di problemi geometrici ſoliti ad eſſere ſciolti dal calcolo infiniteſimale ſi recano eſempj, in cui ſciolgonſi felicemente colla nuova teoria del Nulla geometrico. Or chi crederebbe che un' opera lavorata con tanto raffinamento di arte, ed a sì utile fine condotta, come quella che i fondamenti dimoſtra d' una parte tanto importante dell' analiſi, qual è il calcolo differenziale, chi crederebbe che accolta non foſſe con applauſo, con gratitudine, con diletto? Eppure non fu così: il titolo di Niente geometrico diſguſtò molti; ma quanto a torto, rendeſi chiaro abbaſtanza dalla nozione di queſto Niente poc' anzi eſpoſta. Era dovere pertanto non ſi arreſtare alla nuova iſcrizione del tempio, ma entrare, ma eſaminare il tutto e le parti, che avrebbono e giuſtificato loro quella iſcrizione, e data inſieme baſtevole idea della ſagacità e del ſapere dell' architetto. Lo ſteſſo intervenne al celebre Autore *dello Spirito delle leggi*; il qual titolo rivolto ſubitamente in iſcherzo dalla non ſeria nazione fece che la più parte, ſcrivono i Signori Maupertuis e d' Alembert, non ſi curaſſe a principio del libro ſteſſo, lodatiſſimo poi, cioè letto che fu da que' giudici, che la voce del pubblico indirizzarono: e non dubito che letto da giudici buoni il noſtro libro, poſta la debita proporzione tra opera ed opera, non ne ripor-

tasse gli applausi grandi, e avuto il peso de' voti, non ne ottenesse il numero ancora.

Vide pertanto l' Autore che quella opera o stata non era ben letta, o intesa non bene; e però a vie più far chiara la solidità e utilità della sua teoria dettò nuovo libro anch' esso latino, e col titolo di *Cose Geometriche* pubblicollo: nel quale tre problemi propone e scioglie prima sinteticamente coi principj della greca geometria, poi analiticamente colla dottrina sua del Nulla geometrico. E veramente le prime risoluzioni mostrano il sommo vigore di raziocinio, che dall' esercizio della sintesi avea ritratto, onde sostenere le più composte e laboriose dimostrazioni delle verità più difficili ed avviluppate; come le risoluzioni seconde manifestano ciò in che l' analisi vince la sintesi, cioè la speditezza di giungere a meta, per nulla dire ora della fecondità, e ciò in che dalla sintesi è vinta, cioè la luce, che illumina e indora tutto il cammino. Buon Critico appare ancora, inserendo tra quelle dimostrazioni ciò che sulla quadratrice di Dinostrato nelle collezioni si riferisce di Pappo, e servendosi ei primo del manoscritto codice Vaticano per lui emendato accortamente e tradotto, male soddisfacendosi della versione del Commandino. Finalmente elegantissimo Scrittore veder si fa; e in vero due libri di acuta e profonda matematica, annunziati ciascuno da prefazione e da lettera dedicatoria piene l'una e l'altra di tutte le grazie e le veneri del pensare e dello scrivere, parmi cosa rara veramente ed attissima ad umiliarne e lo Scrittore superficiale, ed il rozzo Matematico; ma nel tempo stesso è cosa però da aspettarsi in colui che reca dalla natura il senso vero dell' ottimo: perchè chi al bello s' educa solo, giungerà solo a quello dell' arte che particolarmente coltiva; ma chi propriamente al bello è nato anche cosa non vede o tocca che tosto non ve lo scuopra od infonda, o perchè generale è la disposizione, o perchè il primo coglie

tale o tale beltà, il secondo coglie sempre sotto varie modificazioni la beltà stessa.

Conoscitore dunque sicuro del vero bello, così nelle arti più dolci come nelle più austere, caldissimo amante di quello per conseguenza, non potea a meno di non anche essere artefice in questa ora, ed ora in quella officina; e però mi si permetta, che siccom' egli passava da lavoro a lavoro assai facilmente, benchè diverso, così faccia io pure parlando di lui, e torni alle belle lettere dalle matematiche, che poi di nuovo riprenderò. L' amor per la madre lo condusse all' amore per la più bella delle figliuole; dico, che amando la lingua latina, amò anche la italiana moltissimo, e scrisse in questa con eguale purità, e con leggiadria non comune: ma pure, ragguagliando gli scritti, vedesi che la madre gli era più familiare e che seco egli usava liberamente, ove la conversazione colla figlia era più alquanto studiata, ed elegante sì bene, ma d'una men facile alquanto e men disinvolta eleganza. Quattro Lettere abbiamo stese in tal lingua; la prima che uscì delle quali s' intitola: *della denominazione del corrente anno volgarmente detto* 1760; ed è una di quelle scritture che prodotte vengono da quelle contese, le quali se discompagnate non sono dalla urbanità, fanno il saporito ed il vivo della civil compagnia. La quistion veramente era manifesta per sè, e non pare che bisogno ci fosse d' uno scritto per terminarla: perchè quale Astronomo ne' suoi calcoli andar non fa, per grazia d' esempio, gli scorsi mesi di gennajo, febbrajo ecc. per l'anno 1785? ma come io penso che quella conversazione composta non fosse di Astronomi, e nè manco di gente, che delle usanze loro sapesse, correndo gran differenza tra un ritrovo di Caffè, e quel di una Specola; così fu necessario il dettar quella Lettera, e fu bello con erudizione pari alla gentilezza il dettarla, rilevando l'errore di Beda, cui malamente, in cambio di Dionigi Esiguo, noi se-

guitiamo. Una consimile origine ebbe quell' altra sua al celebre Autore delle lettere Virgiliane, condita veramente di forti sali e di molto brio illuminata; ma che qui basta citare, siccome quella, ove non trattasi propriamente d' affar letterario, ma di personali e civili cose, che non sono importanti, se non quanto son nuove e calde le circostanze, onde nacquero, raffreddate le quali, quelle pure raffreddano. Maggiore considerazione si meritano quelle altre due che versano sopra Dante, dell' onor del quale non era il nostro Torelli men tenero di quello che fosse della beltà sua innamorato. Gran cura pertanto ei ci pose dietro, e quantità di passi ne interpretò nuovamente, con animo di comporne una novella edizione, di cui gli parea, e non a torto, che facesse Dante richiesta: e veramente i due passi del Purgatorio, che in una spiegò di codeste Lettere, fan sospirare agli amatori del gran Poeta l' abito intero, ond' esser dovea per mano del Torelli vestito. Ad un vero amante poi non soffre l' animo che gli si oltraggi la cosa amata, anche ove incompetente sembri e da meno chi oltraggia. Uno scrittore, com' è il Sig. di Voltaire, che spesso non sai se dica per dire o per ischerzare, che mira più al passatempo che all' istruzione, e che o trascura o dissimula la verità, non meritava certamente una risposta seria e adeguata, allorchè parla giusta quello stile del nostro Dante: lasciando ch' ei pure non avea quell' esercizio di lingua italiana, che per giudicar gli bastasse dell' italiana poesia. Malgrado ciò, non diede il cuore al nostro Torelli di comportare una ingiuria, non autorevole è vero, ma però lanciata da bocca di autorità grande, e meritamente, nelle cose del Gusto, e però quella nell' altra sua lettera ribattè; la quale gioverà sempre, se non fosse per altro, a mostrare vie più, qual conto si voglia far de' Francesi nella bella nostra letteratura, utile avvertenza in un tempo che molti studiano eziandio quella ne' francesi libri, e non s' accorgono che parecchj di que-

gli ſpiriti, ed anche di que' precetti ſon buoni per loro, che a noi o non ſervono punto, o pregiudicano, chiaro eſſendo che le ſcienze ſi rimangon le ſteſſe in ogni nazione, ma che le lettere, diverſamente parlando, ſi muovono ancora e ſi atteggiano diverſamente.

Ma il noſtro Torelli al giudizio accompagnò l' attitudine, e ſe fu Critico eccellente, fu anche eccellente Poeta: molto eſercitoſſi poi nel tradurre, a che portato era naturalmente e dall' amor ſuo per gli antichi, e dalla voglia di giovare ai moderni, moſtrando loro i ritratti di quelle beltà, che sì crudelmente e non meno a torto abbandonano. E ſolea dire tanto eſſer lunge che tal meſtiero s' abbia a tener per ſervile, che anzi vi ſi occuparono ſpeſſo gl' ingegni ſovrani, e ſempre gran conto da' più ſavj ne venne fatto; e nominati alcuni Latini ed Italiani, ricordava eziandio que' due lumi del Parnaſo ingleſe Drayden, e Pope, al primo de' quali non fece men torto la men che buona verſion dell' Eneide, oſcurata poi affatto dal lume di quella di Trap, che onor faceſſero le Favole ſue e le ſue Odi, ed al ſecondo la verſion dell' Iliade, cui niuno tentò levare di ſeggio, non fu men di gloria che il poema ſulla Critica, e quello ſull' Uomo. Voltò il noſtro Traduttore i due primi libri dell' Eneide, il Pſeudolo di Plauto con alcuni Idilj di Teocrito e di Moſco, il Poemetto ſulle nozze di Peleo e Teti, ed il ſecondo Epitalamio di Catullo, ed altre minori coſe; e così aveſſe ripulita come compita avea la traduzione di Teocrito, che però non vuolſi mettere a luce, meno per quello che è, onde onore ne avrebbero molti, che per quello che non ha potuto eſſere, non dovendo del Torelli uſcir coſa non fatta a pennello, e da eſſo medeſimo licenziata. Tradusse ancora per ſoddisfare a ragguardevole perſonaggio della Inghilterra quella bella Elegia di Tommaſo Gray ſcritta ſopra un cimitero campeſtre, e degna veramente di eſſer tenuta qual coſa antica: al

al qual proposito non saprei non rilevare una novella testimonianza dell' amor suo verso il bello necessariamente originato da quel suo senso in conoscerlo ed in sentirlo. Perciocchè non fu contento veder molto innanzi nella franzese e nella inglese letteratura; ma leggendo un tratto nelle traduzioni l' incomparabile Romanzo del Don Chisciotte, parvegli che quegli spiriti, quel sale, quella forza, e diciam pure quella specie di bello perdesse troppo in terra non sua trapiantato, e pigliandone sdegno, non potè temperarsi dall' applicar subito alla lingua spagnuola; e non prima si tranquillò, che gustata non ebbe nell' originale la saporitissima opera del Cervantes, dal quale passò ai poeti di quella nazione, e di Garcilasso della Vega singolarmente invaghì. Non è gran cosa il sapere più lingue; ma il saperle, non per una certa curiosità, non per far poscia dell' erudito, ma per un desiderio, e voglio dir anche bisogno di conoscere le varie sembianze che dalle varie lingue e nazioni il Bello sempre uno nella sua essenza ritragge, è indizio certo d' un' anima nata fatta per esso, ed alla più interna conoscenza di lui naturalmente e da insuperabile impeto traportata. Ma venendo alle traduzioni, il nostro Torelli avvisava essere la traduzione un ritratto che non vuolsi apprezzare, se non quanto rappresenta l' originale; e però non solamente i concetti, ma dover ritenersi, quanto altri può e permette eleganza, le forme ancora, dalle quali dipende il togliere o aggiungere, l' infiorare o sfiorare, il metter luce nell' ombra, che non pare minor peccato che il metter ombra nella luce; e va discorrendo. Se così debbasi, o altrimenti, cioè con maggior libertà adoperare, è quistion grande, e che probabilmente non sarà mai diffinita, perchè non vedrem mai traduzione probabilmente, che o nell' un modo camminando o nell' altro affatto aggiunga suo testo, e quindi servir ci possa di modello. Sembra però che dir si potesse così: gli uomini di gusto sottile

in pittura prepongono le buone impreſſioni in rame non ſolo alle carte fatte coll' arte , *Che alluminare è chiamata in Pariſi* , come dice Dante , e molto più alle ſtampe colorate del le Blond, tentativo ancor molto dalla ſua perfezione lontano ; ma eziandio alle copie ſolite de' pittori le preferiſcono , veduto che abbiano o non veduto l' originale : perchè dall' una parte queſte copie mandano troppo altro colorito che quello che io cerco, e dall' altra le ſemplici ſtampe dan meglio il diſegno , e l' occhio in nulla ci offendono . Ora i concetti non ſono il diſegno , e le forme il colorito d' una poeſia? il qual colorito, anche ove nelle verſioni molto inerenti non altro più rimaneſſe che un chiaroſcuro, ſembra però che queſto preferir debbaſi alle falſe e bugiarde tinte d'una traduzione, che trasforma e ſviſa con quelle i concetti ancora, e l'indole ſempre meno e il carattere dell'autor ſuo rappreſenta . Ma comunque ſia e di queſto confronto , e della ſtrada dal noſtro Volgarizzatore tenuta, noi ci contenteremo di dire ch' ei fece di ottimi paſſi nella via, qualunque la ſiaſi , da lui ſcelta; il che baſtando alla lode ſua , baſterà , credo, per la ragione medeſima al mio diſcorſo.

Non era però egli di coloro , che fan traduzioni , perchè non bene creando verſeggiano, e che per queſto nè ben pure il più delle volte traducono: ma quando a quando anche di per sè camminava , e de' ſonetti particolarmente ſi compiacea, cioè d'un componimento, ove il più timido arbitrio non ſi concede, ove non ſi perdona una macchia , un neo , e colpa non cade che grave non ſia e irremiſſibile. Purgatezza adunque di lingua , atteggiar tutto con grazia o muovere con robuſtezza, melodia accomodata, e quella ſua compagna men conoſciuta , benchè indiviſibile , l' armonia ; ed in oltre la diligenza, il non temere le caſſature, l' amor della lima: coſe tutte che non mancavano al noſtro Poeta, e che però gli aprivano queſto campo de' Sonettiſti, quanto più an-

gusto tanto più difficile a farvi dentro sua pruova. Dal che si vede com' egli era in punto di ottener quello che sembra il più arduo in poesia, cioè di piacere senza dir nulla; non ch' egli, dotto com'era, non sapesse arricchir di cose i suoi versi, e fatto assai volte non l' abbia; e così non dico che generalmente non sien da estimarsi sopra tutto que' componimenti che alla lucentezza de' fiori la sostanza contemperano delle frutta; ma si dirà però sempre esser uno de' maggiori sforzi dell' arte l' adescar l' animo senza occupar l' intelletto, cosa fuor di confronto più difficile, che questo il far senza quello, perchè un pensamento acuto o profondo può cader in mente d' ogni uom bennato, ma uscir non può ben vestito e canoro che dalla bocca del vero poeta. Di fatti l' esporre, diceva il Torelli, solamente in versi ed in rima sì facili a farsi ed a trovarsi in lingua italiana quello che ogni colta persona parlando espone al bisogno nell' umano convitto, o anche quello che nella illustrata età nostra ciascun può trarre dal grembo della filosofia, non è egli un comperarsi a troppo buon prezzo il diploma di cittadinanza in Parnaso? e per questo veggiamo in Italia così desolante inondamento di poesie, cioè dopo che a trascurar cominciossi il vezzo della espressione, ed il fiore dell' armonia. Quindi la corruzione, seguitava il Torelli, d' un' arte così difficile e ad un tempo così confidenzialmente trattata, quindi i falsi giudizj, e la lode ed il biasimo ugualmente male rivolto; e di vero non maraviglia: che per poco che altri tenga uno spirito gentile e chiaro comprende tosto la forza d' un pensamento; ma quanto pochi non sono, anche tra poeti stessi, coloro che intendano la vera poesia e quelle infinite e minute, nè però meno importanti, differenze rilevino di stile e di numero, primo costitutivo dell' arte, quali non giunge ad annoverarle tutte il filosofo, e che tanto volentieri si fan sentire dal cuore, quanto mal soffrono venir disputate dall' in-

telletto? Perſuaſo pertanto il noſtro Poeta, che rariſſimi anche tra gli artiſti giudicar poſſano di queſt' arte, della quale al contrario non che gli artiſti, ma ciaſcuno vuol dar giudizio, di pochi lettori, come dee fare con Orazio ogni ſavio, ſi contentava: ed io credo che mancandogli talora i ſuoi giudici, ei s' immaginaſſe dover preſentarſi al tribunale di Dante, o del Caſa, e quindi faceſſe ogni che, onde partirne aſſoluto; diſſi Dante ed il Caſa, perchè di queſti compiacevaſi il più, ammirando nel ſecondo ſingolarmente la bellezza del numero e pel rompimento de' verſi e per altri riſpetti sì grave e forte e variato; e nel primo, oltre queſte coſe, la proprietà, e il ſugo e nervo del dire, e quella celerità ed evidenza maraviglioſa in rappreſentare e dipingere.

E qui mi piace di aggiunger quello, che già dalle coſe riferite può comodamente conghietturarſi, e che finiſce per avventura di bene caratterizzarlo: dico che in quelle facoltà ancora, ove erudita non fu la mano, erudito però ſempre fu l' occhio; intanto che d' ogni liberale arte e meccanica dilicatiſſimamente ſentiva ed aſſai maeſtrevolmente diſputava. Certo non era pittore tra noſtri, che degli ſtranieri, non avendo viaggiato, aver non potea gran notizia, di cui egli non ſapeſſe rilevar ſubito il guſto e l'anima; e non ſolamente nella ſcultura ed architettura, ma in qualſiſia ſuppellettile e arneſe domeſtico ſubalternato al diſegno, era così ſottile e difficile, che non potea comportare una forma men ch' elegante, ed una eſecuzione men che preciſa: e particolarmente, com' uom letterato, delle volgari impreſſioni in rame, e di ciò tutto che l'arte tipografica diſonora, grazioſamente ſdegnavaſi. La quale ſcontentezza e difficoltà anche nelle picciole coſe, tanto è lunge che picciola ſia in ſe medeſima, che anzi conſiderazion grande ſi merita, e ſempre meglio dimoſtra quel ſenſo in ogni coſa di perfezione, che a formar viene di lui col più vero carattere l' elogio ancora

più bello. E perchè non fosse più cosa, ch' ei non avesse, se non gustata, assaggiata almeno o lambita, volle sapere alquanto di musica, imitando per questo pure i suoi cari antichi, ed il Galilei che gli era caro quanto gli antichi, i quali a tutte le discipline (che le coltivavano tutte) univan pur questa: e però non contento egli di aver l' orecchio musico e l' anima, che tale in lui di necessità esser dovea, volle averne anche l' intelletto, e come vago ch' egli era d' ogni bell' arte, ed eziandio come matematico, tra gli studj del quale può riporsi la musica, e sotto il quale aspetto io ritorno ancora per poco a considerarlo.

E' noto non esserci nella fisica teorema più fecondo di quello della composizione di due moti, secondo i lati d' un parallelogrammo, in un sol moto, giusta la diagonale di esso: nella meccanica particolarmente l' incontriam sempre, e l' astronomia stessa certo è che ad alcun altro più non appoggia. Instrutti di questo gli uomini prima dalla esperienza, *fonte*, come scrisse il Poeta filosofo, *ai rivi di nostre arti*, ed applicata che fu poi la fisica alla matematica, cercossi d' ornarlo anch' esso di geometrica dimostrazione: ma in un vero altronde sicuro dilicati più che tanto non furono i Matematici, e paghi si tennero di quelle dimostrazioni, che d' essere così dette non meritavano. Ma non così l' Autor nostro, che non era di tanta condiscendenza. Il perchè amico sempre fedele ch' ei fu degli antichi, ad essi ricorse, sperando riceverne quella risposta, di che i moderni inutilmente prima avea domandato. Ma la speranza gli andò fallita; nulla trovando da vantaggio che la proposizione di Aristotele, e quella di Gemino, riferita da Proclo, ambedue troppo limitate, e quella in oltre del primo sopra la base viziosa d' un inconcludente raziocinio inalzata. Non rimanea dunque che tentar di per sè nuova e rigorosa dimostrazion geometrica; e veramente con assai favorevoli auspicj tentolla in quella ope-

retta latina ſul moto compoſto non ha molti anni pubblicata, potendo anche ſervir di pruova al felice riuſcimento l'eſſerſi nel penſare incontrato col celebre Ab. Friſi, che ſi era alla ſteſſa ricerca contemporaneamente rivolto. Le dimoſtrazioni dell'uno e dell'altro ſono in fondo le ſteſſe, ma i modi di ſtabilirne i principj, di combinarli, e di dedurne le conſeguenze diſtinguono i due ſapienti; e forſe rimane in dubbio, ſe quel teorema reſti più grato al trattamento ſpedito dell' Analiſta frettoloſo, o alle carezze più lunghe e quindi più luſinganti del ripoſato Geometra.

Queſto fu l' ultimo lavoro ſuo in geometria; ma prima avea già compoſto due opere tuttavia inedite, nell' una delle quali un ſuo Trattato contienſi di proſpettiva. Così non è vero, che nuovo ſia queſto campo dopo le fatiche degli s' Graveſande, dei Tailor, degli Zanotti ſuccedute a molte altre più o men fortunate ſecondo i tempi e gl'ingegni, che pare anzi niuno ora mai più deſiderarne i trattati; ſe non che nuovo può dirſi che fatto è il noſtro dalla nuova maniera, con cui è condotto, non avendo egli ſolamente ſvolto colla ſolita cura il ſolito filo ſintetico, ma impoſto eſſendoſi ancora di non ſervirſi che dei pochi ſemi gettati ſopra un tal campo da Euclide. Queſta opera verrà certo prodotta in luce, ma priva anderà di un grande ornamento, di cui l'Autor ſuo fregiata l'avrebbe, vivendo. Perciocchè avea egli fermo nell' animo di accompagnarvi un ragionamento, in cui ſtabilire anche meglio, e con perfetta evidenza, che la proſpettiva ottimamente dagli antichi fu conoſciuta; ſdegnato ei pure, com'era ben naturale, contra il maggior nimico agli antichi, e nimico ſuo proprio per conſeguenza, il Sig. Perrault, e non ben contento di quanto in loro favore l'Ab. Sallier e il Conte di Caylus, e poi il Conte Algarotti e il Sig. Dutens hanno ſu tal materia indicato. E certo che la diſſertazion critica ſtata non ſarebbe men bella della geometrica trattazio-

ne, potendosi dire di lui, che fu eruditissimo tra i Matematici, e matematico, s' io così posso spiegarmi, tra i Critici. Così le discipline tutte s' uniscono insieme e s' ajutano, ma però solamente in capo di chi sappia cambiarne le veci diverse, e regolare gli uffizj di ciascheduna, e però tutte le conosca bene, ed in oltre dotato sia d' una sicura e generale squisitezza di senso.

Ma questa unione in lui e congiura amichevole di facoltadi meglio anche potè dimostrare coll' altra sua opera, dico colla edizion di Archimede, che vedrà il giorno ella pure, e certo per non più abbandonarlo, e di cui forse non sarà discaro che intanto qui si premetta qualche notizia. Rivoltosi dunque ad emendare l' intero testo dell' autor suo, cominciò egli dal leggere e ponderare la edizione di Basilea dell' anno 1544, la quale trascritta per Tommaso Venatore da un antico codice così fedelmente che intatta serbò la scrittura anche ove corrotta manifestamente appariva, può quindi tenersi in conto di quello stesso codice antico. Il perchè vedesi se di mancamenti e di errori ridondar dee, e se mestieri v' abbia d' ingegno, e d' opera critica. Ora tutti questi supplì egli e corresse parte coll' ajuto d' un codice della Biblioteca di S. Marco, e parte della traduzione fatta da Giovanni Cremonese per comando del Pontefice Niccolò V., la quale comechè barbara, pur da codice diverso da quello ritratta, potea guidarlo, ove quello lo abbandonava. Abbandonato poi dall' uno e dall' altra, come gli accadeva spessissimo, ebbe ricorso alla conghiettura o sua propria, o de' valentuomini che il precedettero, quali sono il Commandino, il Rivalto, il Barovvio, ed il Vallisio, a cui egli più debbe che a ciascun altro, massime nelle opere della *misura del cerchio*, *e dell' arenario*, mettendo a piè di pagina i passi de' codici, onde sia libero a tutti il giudizio di quelle conghietture. Emendato il testo, e le opere secondo il tempo

della loro nafcita riordinate, ne intraprefe la verfione latina renduta neceffaria dalla imperfezione di quelle del Cremonefe e del Commandino, e compiuta con quella efatta eleganza ch' era fua propria, e tanto più bella, quanto a carpirfi difficile e per la materia, e per la lingua d' un popolo che negletto avea quella fcienza. Nè qui riftettero le fue fatiche; ma pofe la fteffa cura eziandio intorno ad Eudocio d' Afcalona, che fcriffe un comento fopra i due libri della *Sfera e del Cilindro*, e d' altre opere d' Archimede, comento per altro utile più che neceffario a chi prima letto abbia Euclide ed Apollonio, cioè fatto come fi debbe al parer del Torelli e de' favj lo ftudio della geometria; e però non fupplì egli, ove manca il comento di Eudocio, come alcun forfe potrebbe defiderare, e dimoftrò folo alcuni teoremi che Archimede propone, e di cui perdute fi fono le dimoftrazioni. E forfe gli coftò più la reftituzione di quello che non di quefto, perciocchè a quello veruna medica mano prima della fua non s'era accoftata. Finalmente fi chiude il lavoro colle opere meccaniche, fecondo che di ciafcuna fanno menzione gli antichi fcrittori. Precedelo poi una dottiffima Prefazione, ove in un colla vita d' Archimede fi dà contezza delle fue macchine, delle quali intento, come narra Plutarco, alla fola fpeculazione, non degnò di lafciar memoria in ifcritto; fi prova effere fuoi i due libri delle *cofe portate ful fluido*, benchè folo ne refti, perduto il greco originale, un' antica verfion latina; ed al contrario fi moftra che male afcrivefi a lui il libro dei *lemmi* confervatoci in arabo, ma che nondimeno avrà luogo coi due fopraddetti nella edizione. In oltre più cofe opportune vi fono fparfe, e belle ricerche vi fi fanno fpettanti ad erudizione, alla greca lingua, ed alla fcienza matematica; come qual foffe il metodo veramente, onde Archimede fcoperfe quello che coll' ajuto del calcolo integrale trovafi ora, e fe mai fu colla brevità portato anche la ofcurità dagl'

indivifibili

indivisibili del Cavalieri, che usò di principj per avventura meno che lucidi; se ricevute fossero dall' antica severità le infinitesime quantitadi, ciò che pur vorrebbono alcuni; se Archimede ammettesse, ciò che dicono altri, que' sussidj per l' arte analitica, che i moderni Geometri si procacciarono; quanto nel passato secolo per nuovo si diede che stabilì Archimede sono due mille e più anni, e quanto a lui debbesi non men riguardo alla fisica che alla geometria; e conchiude, che gli antichi s' ebbero gli stessi metodi quasi, che usiamo noi, se non quanto sopra di fondamenti più sodi e più sicuri gli fabbricarono. La dotta Inghilterra, che sola mantiene il gusto tuttora de' sani studj, sembra disposta a pubblicare questa opera Veronese per insinuazione de' Signori Strange, Stanhoupe, e Stormont commendabilissima: e dalla fiorente Università di Oxford, onde già uscirono l' Euclide di Davide Gregory, e l' Apollonio di Edmondo Allejo, l' Archimede anche di Giuseppe Torelli sperasi che uscirà, degno certamente della immortale compagnia, ed attissimo a far vedere che se l' Italia manca talora di buoni instituti, non mancano però mai gl' ingegni buoni all' Italia.

Ed ecco le opere tutte, così di varia letteratura come di scienza, lasciateci dal Torelli. Che molto egli abbia operato, massime se alla finitezza miriam de' lavori, che tanto più vale della lunghezza, non credo poter essere in dubbio ad alcuno: nondimeno mi convien dire che manco operò egli di ciò che avrebbe potuto, il che se nulla fa veramente all' utilità pubblica, fa però molto alla privata sua gloria, e se non soddisfa il popolo che rozzo non giudica che dagli effetti, può nondimeno il Filosofo che le cagioni ancora disamina soddisfare. Or che si vuole ch' io dica? la rettitudine stessa della sua mente, la fina tempera stessa dell' animo suo fece, convien crederlo, che più innanzi ancora non procedesse: tanto gli è vero che siam sempre uomini, e che le

doti eziandio più alte e divine prendono sempre del basso e terrestre che proprio è di questa nostra natura. Quel senso dell' ottimo in ogni cosa più volte da noi ricordato gli facea tosto comprendere le difficoltà tutte che in ogni cosa s' incontrano; e quindi la perfezione all' occhio di lui era in assai più sublime ed inaccessibil luogo, che all' occhio degli altri, riposta. Conformato a tal modo, pigliava tra mano le opere ancora più celebri, e vedeva che quanto più rilevanti e più lunghe, tanto erano ancora più gremite di errori e più testificanti la umanità, quindi anche per se stesso oltra ciò che d' altra parte gli si conveniva, temea, e però il veder più era cagione che osasse meno; nè si commetteva mai alla fortuna, che pur essa ha gran parte nel mar letterario, e salva talora chi per troppo ardire all' incontro meritato s' avrebbe il naufragio. Aggiungasi in oltre che la presente anarchia nel regno delle lettere, corrotte per conseguenza, cadere gli facea l' animo e quindi la penna; onde mi dicea spesso che applicava per erudire e dilettar se medesimo, e curavasi meno di farsi noto al comune de' letterati, cui sapea non dover piacere i suoi parti, veggendo approvarsi da loro ciò ch' ei non potea che disapprovare, e quindi la lode più ancor del biasimo paventando. E però solamente o per regalare un amico, o per compiacere a qualcuno, o per altra civil convenienza e riguardo alcuna cosa tratto tratto mandava a stampa, che però non era che un saggio di quel che potea maggiore assai di quel che mostrava, ma che ancor tale palesa ai giudici buoni quel più che fatto avrebbe volendo, perciocchè l' occhio erudito vede il danzatore da un solo passo, e del musico s' accorge in due note l' orecchio dotto. E tutto ciò intendasi delle sue prose di bella letteratura e di filologia; nel che per vedere se potea più, basta eziandio considerare il gusto suo nello scrivere, la sua perizia delle lingue antiche e moderne, la sicurezza della

critica, e l' istancabilità nello studio. Riguardo alla poesia, sentiva io stesso di molti lagnarsi che facea poco, e solamente uscía a quando a quando con qualche suo breve componimento: lagno singolare in vero e grazioso! quasi che l' Italia scarseggiasse di tal merce, e che anzi non sia necessaria nelle più dolci e fine cose per appunto una certa economia e sobrietà. Che se maggior numero di versi avrebbero dal Torelli desiderato per una particolare e maggior beltà che in quelli scorgevano; quale più bello elogio posso io mai fargli di questo? di fatto dicasi pure che un tal desiderio è pruova sempre di merito, perchè niuno domanda versi ai Bavj ed ai Mevj, e questi, per poco ch' e' facciano, il troppo sempre saranno. E per verità se indubitato è, che ben fare, non il far molto, sia la verace misura dell' eccellenza, indubitatissimo è questo poi nella poesia: e ottimamente fu scritto da quel maestro, che un sonetto senza mancanze val più che un lungo poema. Ma forse quanto alle matematiche, di cui formò egli lo studio suo più grave ed assiduo, dirassi con più color di ragione che le sue stampe non risposero totalmente all' applicazione di lui ed all' altrui aspettazione, che potea curar meno le minori cose, e darsi maggiormente alle grandi, e che dopo le tante visite e lunghe agli antichi dovea starsi un po' più, che fatto non ha, co' moderni, superbi essi pure di bei tentativi ed utilissimi ritrovamenti. Quanto al curar meno le minori cose, egli credea veramente che in geometria così, come in poesia, nulla ci fosse di piccolo ed indifferente, e che poi si potesse attendere a quelle senza pregiudizio delle maggiori, onde anzi la massima lode così nel Letterato, come nel Ministro, o nel Capitano; e ciò credendo, a me pare che ben credesse. Rispetto poi alle cose grandi, io confesso che benchè pur queste trattato egli abbia, potea però trattarle ancor più, potea maggiormente tentare, osare, maneggiar più,

senza danno della sua sintesi, la sola chiave, che abbiamo adesso, de' tesori novelli, l' analisi algebraica, ciò tutto è vero; ma io lo ripeto, è il popolo grosso ed ignaro che solamente giudica dagli effetti, perchè in se stesso non mai considera l' uomo. Lasciamo a lui dunque il pesare le cose e gli uomini secondo l' utile che alla civil compagnia ne deriva, abuso più che mai grande oggidì, ed abuso che porta oltraggio gravissimo alla virtù, come non fosse bella e risplendente in sè medesima, ma solo per que' raggi di utilità, che schizzano d' essolei. Io non dico che da stimar non sia sopra gli altri quel letterato compagnevole e pubblico, per così dirlo, e accademico, ch' s' argomenta con novelle prove di renderne più agiati e meno infelici; ma perchè ancora non loderemo l' uom solitario e privato e lontano da ogni accademia, che adorna se medesimo di tutte le scienze, e queste coltiva a quel modo che più gli aggrada, modo però che non esige minore chiarezza, acume, e forza d' intendimento? e veramente dietro la falsa regola dell' utilità ciascun vede che sarebbe più da pregiarsi il muratore che n' alza la casa, che non il dipintore che de' suoi quadri ne l' orna, come da un gran Savio fu detto, e come di tante altre facoltà ed arti può dirsi. Ma lasciando anche questo, io vi dico che un letterato, come fu il nostro Torelli, è anche di gran giovamento al vero progresso delle scienze, sebben non appaja così tosto la parte ch' ei v' ha; perciocchè nel tempo che altri le avanza, è non men necessario chi sappia regolarne l' avanzamento, e con quel gusto che proprio è della scienza tenga in cammino quelle dottrine che nel lor corso potrebbero traviare; ed io lodo quel filosofo che quasi vento forte e propizio la gran nave del sapere spinge oltra, ma non loderete voi l' altro che al timone sta della nave e il difficil corso ne regge? ed io so bene che questi non opera senza l' operare di quello, ma quegli la spingerebbe al precipizio e alla

morte senza la guida e l' avvedimento dell' altro. In oltre fatto e disposto com'era, non potea necessariamente altro da quello riuscire. Perciocchè ciascun sa che promovendo una scienza è necessario assai spesso di cominciar quello che non si può compiere, e di lasciare alcune cose meno perfette ai posteri che le perfezionino poi: ma il Torelli, che quanto diligente ed esatto era, tanto, e a ragione, dell' esattezza e diligenza altrui diffidava, non avea cuore di lasciar crescere nell' altrui mano i proprj suoi parti, e però amava meglio di fabbricare un palagio solo ed ornarlo in ogni sua parte e compirlo, che i fondamenti gittare d'una intera città, e poi al lavoro e alla discrezione de' posteri abbandonarla. Ed in oltre ancora, non sembra egli che prestato abbia utilità e comodo grande ai matematici col presentar loro purgato e netto, e meglio parlante una lingua notissima, il padre di que' trovati, in promovere i quali, come dice il Wallisio, gloriasi più l' età nostra, Archimede? Ma io già temo non venga sospettato di me, quasi m' affatichi troppo a cercare gli argomenti della lode in un tempo ch' ei non abbisogna veramente di tale ansietà; e però dico solo e non più, che gli fa elogio eziandio la costanza sua in non aver punto ceduto al tempo così nella grave come nella gentile letteratura, serbando una sanità di gusto nel generale contagio maravigliosa; la qual resistenza contra il tempo, che i più forti anche strascina, non può derivare da altro che da quel suo naturale e colla buona disciplina perfezionato senso dell'ottimo, da quell' armonia e temperatura di animo bene educato ed ottimamente nodrito, in una parola dal vero gusto, che gli fu sempre guida fedele nella difficil via delle lettere.

Quello che abbiam detto come letterato, dir possiamo anche come uomo solamente; perciocchè io crederò sempre che un uomo nato ed allevato alla verità e alla bellezza abbia ad essere necessariamente virtuoso, e che però quello che ben lo

guida nel cammin delle lettere, deggia ben anche guidarlo in quel più difficile della vita, ciò che in poche righe a dir resta. Nè vi faccia ombra il vedere, spesso pur troppo, alla filosofia ed alle arti la turpitudine congiunta ed il vizio; perciocchè rarissimo è quell' amor verace ed universale del bello di cui vi parlo, amore così ben veggente, che tosto coglie le relazioni tutte ed i vincoli del fisico col morale, della scienza colla sapienza, e così potente, che lega tosto con quella mirabile e direi più che aurea catena, da cui tanto impossibil cosa è sciogliersi poi, quanto è cosa rara venirne una volta annodati. E come era pari nell'anima del Torelli alla rettitudine e all' armonia, onde il vero gusto per le scienze gravi, la fina tempera e delicata, onde il sapor vero per l' arti belle, così riguardo alla qualità prima fu sempre nimicissimo d'ogni discordanza nella vita, e di quanto anche per poco turbasse l' ordine della civil compagnia, e riguardo alla seconda, fu dolce ed umano di affetti, ed ebbe quella gentilezza di cuore, che sparsa sulle opere della vita rende nell' uomo più amabile la virtù, come sulle opere sparsa dell' ingegno rende più amabile la scienza nel letterato. E veramente come la perfezion letteraria par risultare dalla colleganza del bello spirito e del forte intelletto, delle lettere e della scienza; così può dirsi che la perfezion civile risulti dalla colleganza de' gentili affetti e degli onesti pensieri, della sensibilità e della virtù.

Fino da' suoi più verdi anni operò cosa che ben merita di essere ricordata, e che mostra, che se premature furono le sue lettere, furono ancor prematuri i costumi suoi. Perciocchè sendo tuttora in Padova a studio, compose insieme e riunì due celebri uomini, il Facciolati ed il Volpi, d' ambo i quali amico era, e tra cui, come pericolo è dei correnti alla stessa meta, dissidio e nimistà vide sorta; egli giovinetto due quasi vecchj, egli scolare due cattedratici. Ed una lode

di ſimil fatta , ma più bella , perchè in occaſione aſſai più difficile e dura , riportò egli molti anni dopo nella ſua patria, quando contribuì di tanto a ſopire quelle diſcordie che tra i Nobili di queſta città non aveano sì debile e tepida fiamma levato.

Quanto alle amicizie, due ſole, tra le molte ch' ei n'ebbe, io ricorderò: quella col dotto ed elegante Abate Sibiliati , amicizia di ben quaranta anni , e nondimeno coltivata ſempre, malgrado l'aſſenza, coi vivi traſporti del tempo primo; e quella coll' ornatiſſimo Cavaliere Marcheſe Ottavio di Canoſſa , amicizia ch' io qui ricordo , non perchè ei foſſe uno de' più ragguardevoli Signori d' Italia , ma perchè dopo il giorno della ſua morte nacque nel Torelli quella fiſica indiſpoſizione , che a poco a poco cambiata in morbo , lo traſſe finalmente al ſepolcro. Ed altro non aggiungo; che i cuor gentili m' intendono, e i rozzi io non curo. Di me non parlo; tanto più che non ſo veramente, s' egli mi foſſe o amico, o padre più toſto: queſto ſo bene che il padre mio vero mi raccomandò poco prima della ſua morte al Torelli, e però mi piace notare a debita lode dell' uno e dell'altro, che io certo non potea eſſere ad altre migliori e più paterne mani raccomandato . Laſcio parecchj altri amici ch' egli ebbe ed eſtimatori grandiſſimi in Italia e fuori, e maſſime tra gl'Ingleſi, nazione in ſingolar pregio e oſſervanza da lui avuta; e due nominerò ſolamente, anche per una certa analogia tra loro di carattere e ſtato, il Conte di Firmian, e Milord Stormont, ambidue miniſtri ad altre Corti prima, indi preſſo la propria, ed ambidue Mecenati veri delle arti, perchè diraſſi di loro che alla munificenza accoppiarono le cognizioni, ed a queſte il guſto, ſenza cui poco vagliono le cognizioni, e meno ancora la munificenza. Laſcio anche l' amor non comune che portò ſempre alla madre , e la bontà non ordinaria che ſempre tenne ai domeſtici : alle quali doti del gentile animo

quelle a maraviglia unì dell' onesto, antica severità nel costume, modestia nel culto esterno, e non minor temperanza nell' interno suo trattamento, fermezza ne' propositi buoni, giustizia nelle azioni la più scrupolosa, filosofia cristiana in un detto; la quale unione di tali doti ed alleanza a formar viene quella civil perfezione che abbiamo sopra indicato.

Ma eziandio nella civile sua vita, come l'uomo è sempre lo stesso, dobbiam condannare ciò che nella vita sua letteraria ripreso abbiamo; perciocchè siccome in questa non operò tutto quello che avrebbe potuto, così lo stesso fu in quella, ricusati avendo tutti quegl' impieghi che spontaneamente in patria e fuori gli si appresentarono. Il Conte Cristiani Governatore allora di Milano desiderava di averlo presso di sè, e Marcantonio Priuli patrizio Veneto lo voleva presidente degli studj in questo Militare Collegio, che venne allora giusta i consigli del Torelli riordinato, ed a tal carico invitato l' avrebbe il Senato stesso con assai largo stipendio, e col titolo di Colonnello, cosa di cui non può darsi sotto a questo cielo la più degna di essere vagheggiata. E da Padova ancora, per leggere in quella Università, e da Mantova per essere Segretario di quell' Accademia, invito più volte e richiamo gli venne fatto. Ma ricusò egli ogni cosa: o fosse in grazia di quella sua fina e acuta prudenza, che si può chiamare il gusto delle opere della Morale, in grazia io dico di quella prudenza, per cui vedesse le difficoltà tutte, e temesse non poter quello che avrebbe potuto, come gl' incontrò nella letteratura, o fosse che allo splendore dell' oro, e all' incantesimo dell' ambizione ei preferisse i piaceri puri e costanti dell' ozio letterario, della vita privata, e della libertà. E veramente riguardo al primo e le persone che lo invitavano, e più la desterità sua, in altro sperimentata, promettea tutto anche per le cose maggiori, come si disse di lui nel

nel fatto delle lettere, e riguardo al secondo, se dall' una parte non volle più ancora impiegarsi a vantaggio degli uomini, seppe dall' altra però vincere l' amabilità delle ricchezze, e la tirannia della vanità, alla quale spesso, non men che a quelle, vien dato il nome di amore dell' util pubblico. Nondimeno noi condanniamo in questo il nostro Torelli, preferendo le virtù morali che stanno tra gli uomini a quelle che vivono nella solitudine, così veramente però che si conceda non esser queste men belle in se stesse, anzi più esserlo ancora, perchè solitarie conservan meglio quella purezza, che alquanto imbruna tra gli uomini nel tempo stesso, che a loro è di utilità: come per tale rispetto il letterato pubblico abbiamo al privato antiposto, benchè sembrar possa più bella nel bello intelletto la scienza solitaria, siccome quella che lontana dai pregiudizj delle scuole e delle accademie, non soggetta alla moda ed alla corruzione del gusto, più assai facilmente pura si conserva ed intatta.

Quest' ozio erudito, questa vita libera e chiusa eran dunque le sole delizie sue; non così però che suggisse la conversazione, ma non parea dilettarsene, se non quanto con persone usava di studio, e di cose di studio s' interteneva. Nè gli mancavano di bei motti, massime ove cadeva sulle moderne cose il discorso, contro le quali parve procedere veramente alquanto più là che non si voleva, come procedette forse anche troppo in favor delle antiche: benchè la stessa conoscenza sua degli antichi tanto profonda vaglia non poco ad escusarlo. Colui che Archimede intenderà bene, dice il gran Leibnizio, stimerà molto meno le scoperte de' moderni più rinomati: e chi ben conosce, mi si permetta l' aggiungere, un Omero, un Tucidide, ed un Demostene; un Virgilio, un Sallustio, ed un Tullio; un Longino ed un Quintiliano; un Dante ed un Machiavello; è forse condannato, conviene compatirlo, a non gustar più che tanto i moderni scrit-

tori ; e così vien meno ſorpreſo dalla moderna filoſofia chi ſa vederla e riconoſcerla in volto all'antica. Che poi un po' troppo a disfavore ſentiſſe degli oltramontani, e ſingolarmente de'Franceſi in fatto di bella letteratura, è men da ſtupirſene, mirando alla molta ſua conſuetudine e familiarità col Marcheſe Maffei; ſoſtenuto avendo queſt' uomo grandiſſimo, ma ſpeſſo dall' amore, per altro così laudevole, della ſua nazione ſignoreggiato troppo, che è meſtier noſtro la poeſia ed oratoria dai Greci e dagli antichi Italiani eſcluſivamente ereditato.

Ed eccomi giunto a quel termine colle parole, a cui giunto era colla vita il Torelli, che già mal diſpoſto da qualche tempo, e d' una ſalute fluttuante ed ambigua, fu in ſeguito preſo da morbo acuto e violento, onde fu tolto di vita li 18. Agoſto dell' anno 1781. ſugli anni 59. dell' età ſua. L' amico e parente ſuo Signor Alberto Albertini, uomo di ſapere e d'ingegno, bel monumento con buſto in marmo gli ha fatto inalzare nella Chieſa di S. Anaſtaſia, ove fu ſepolto; queſt' Accademia Filarmonica, di cui era membro, tener gli fece pubblico Elogio e ſolenne; e queſto Capitolo, la cui Biblioteca laſciò erede de' libri ſuoi, di bella memoria egli pure volle onorarlo: e penſava di far lo ſteſſo il Comune di queſta città, alla quale mi do libertà di ricordare in queſte ultime righe ſcritte per lei, che nulla le proccurò mai tanta lode, come l' aver poſta al Marcheſe Maffei una ſtatua, e che il poſſedimento d'uomini grandi, de' quali è più copia laddove s' onorano, rende con uſura quell' oro, che la fabbricazione fa ſpargere d' un monumento.

ELOGIO

DI TOMMASO PERELLI

Scritto

Da Monſignor ANGELO FABRONI.

NEll' intraprendere l' elogio di Tommaſo Perelli Pubblico Profeſſor di Piſa abbiam creduto di render giuſtizia al merito d' un Filoſofo, le ceneri del quale non ſono ſtate riſpettate dall' invidia, che non contenta di ferire i vivi, ſi compiace egualmente, ſecondo che l' eſige il ſuo intereſſe, di lacerare i morti, o di caricarli di ſoverchie lodi. Il pubblico ci perdonerà queſto sfogo, che non può diſpiacere ſe non a quegl' ignoranti, che non conobbero il merito del Perelli, o a quei ſemidotti che ebbero intereſſe di deprimerlo. Nacque egli in Firenze nel 1704 da Bernardino Girolamo Perelli e da Settimia Cherici di Bibbiena. Il padre di lui, nato in Premalcore piccolo caſtello della Romagna, venne in Firenze per eſercitarvi la profeſſion d' Avvocato, e aveva sì gran reputazione d' uomo dotto ed oneſto, che il Gran

Duca Cosimo III. l' avea destinato a succedere all' Auditore Fiscale Girolamo Venuti carico d' anni e di fatiche. Ma una gangrena in un piede lo tolse di vita prima di occupare una sì onorifica ed importante carica. Il giovane Tommaso fece i suoi primi studj presso i Gesuiti, poi passò a Pisa destinato dal padre alla giurisprudenza. Frequentò pertanto il celebre Giuseppe Averani, ma non in modo che non attendesse con maggiore ardore ad altri studj. In questi non aveva altra guida che il suo talento, e dal rapido progresso, ch' ei fece nella geometria degli antichi, ben dette a divedere che era nella strada, a cui il suo genio il chiamava. Come egli aveva ricevuto dalla natura quell' attività di spirito, che non dà riposo, finchè resta qualche cosa a scoprire, domandò all' Ab. D. Guido Grandi, reputato con ragione uno de' più solenni maestri in matematica, qual cammino gli rimaneva a fare. Il Grandi indovinò il suo genio. Gli servì di padre, ricevendolo ospite nel suo Monastero di S. Michele, e di maestro, comunicandogli i suoi scritti d' algebra, e godè di vederlo sì rapidamente correre in questa difficil carriera da superare, non che uguagliare un giorno i più esperti. Ecco come il Grandi medesimo incapace di adulazione, come lo era d' invidia per uno scolare, che lo precorreva, si espresse in una lettera al suo amico Celestino Galliani. *Il suddetto giovane è tutto innamorato dell' analisi moderna, e ne ha un maneggio mirabile, di maniera che scioglie i problemi più ardui di fisico-matematica da sè, nè vi è cosa astrusa negli Atti di Lipsia, nel Newton, nell' Ermanno, nel Bernoulli, o altri autori, che egli solamente letta la proposta, subito non ne trovi la dimostrazione analitica in poche righe di calcolo, dimostrando e le leggi delle forze centrali per qualunque curva, e le curve che sodisfanno a diverse leggi delle forze centrali, e le catenarie in qualunque supposizione di gravità variabile, e le velarie, e le elastiche, e le trajettorie per mezzi di varia re-*

ſiſtenza, e aſſai più facilmente che non farei io, perchè non ha il capo diſtratto come io in altre coſe. Cinque anni e mezzo conſumò in Piſa il Perelli, e poichè dopo il ſecondo abbandonò interamente la legge, gli piacque di ricever la laurea in filoſofia e medicina. Gliela dette uno ſcolar del Bellini, che era nominato più per la fama del maeſtro che per la propria, e queſti fu il Dott. Antonio Domenico Gotti. Ognun de' ſuoi precettori lo deſiderava o compagno o ſucceſſore, e per fino nella notomia fu creduto dallo Zambeccari degno di ſuccedergli. La morte del padre e gli affari domeſtici, che ne furon la conſeguenza, l' obbligarono di trattenerſi da tre anni in circa in Firenze. La matematica però, la botanica, l' erudizion greca e latina, la ſtoria antica e moderna, le ricerche d' antichi monumenti in quel ricco depoſito della biblioteca Laurenziana occupavano aſſai più il Perelli che le cure domeſtiche. Viaggiava ſpeſſo col celebre Micheli, riputato meritamente allora il Tournefort Italiano, ed ebbe quaſi con lui comune la gloria di molte ſcoperte erbarie. La profonda cognizione, che aveva nelle lingue dotte, e ſpecialmente nella greca, il Salvini, l' acume con cui Filippo Bonarroti paragonava e illuſtrava le prezioſe reliquie dell' antichità, il genio poetico del Buondelmonti e del Crudeli eran per lui tanti diletti di genial converſazione e occaſioni di ſtudio e di profitto. E poichè ebbe nella patria ſua ſoddisfatto all' inſaziabile avidità di ſapere, e di ſaper tutto, ſe ciò foſſe conceſſo ad un uomo ſolo, paſsò a Bologna, nella qual città fiorivano per tal modo le ſcienze fiſiche e matematiche, e sì celebri erano in eſſe i nomi dei Manfredi, dei Beccari, e degli Zanotti, che reputò a ſua gran ventura il vivere domeſticamente con eſſi per lo ſpazio di quaſi quattr' anni. Volle anche conoſcere i principali luminari dell' Univerſità di Padova, e negli undici meſi, che paſsò in quella ſede fortunata delle ſcienze, fu intimo del Poleni, del Morgagni, e del

Facciolati. Questi lo persuase d' aspirare alla vacante Cattedra di lingua greca, gli promise il suo favore, e lo lusingò di un felice esito, sol che prima desse al pubblico un saggio del suo sapere in questa lingua. Non ricusò la condizione il Perelli, e si volse ad Antonio Cocchi suo amico per ottener da lui la copia di un manoscritto greco di Caritone Afrodiseo, in cui si descrivono gli amori di Cherea e di Calliroe. Il Cocchi negò al Perelli quel che poi concesse al meschin guadagno di cinquanta zecchini (che tanto pagò l'opera il Sig. d'Orville), e ciò fu cagione, che si sciogliesse fra loro un' amicizia, che l' amor nelle lettere e una reciproca stima avea conciliata. Tornato il Perelli in Toscana dopo molte erudite peregrinazioni offerì l' opera sua a chi presedeva all' Università di Pisa, e nell' anno 1739 fu fatto Lettore d' Astronomia. Era poco men che nuova questa Cattedra, come lo era interamente l'Osservatorio eretto dalla munificenza di Gio. Gastone Gran Duca di Toscana per servire ai progressi della scienza e al decoro dell' Università. Doveva far maraviglia, che in quella scuola, in cui il Galileo aveva il primo dimostrato il sistema del mondo, e annunziato tante sue celesti scoperte, e l' uso mirabile per la geografia e nautica di quelle dei Satelliti di Giove, tutto lo studio della astronomia si fosse ridotto a spiegare il Quadripartito di Tolommeo, che vuol dire ad una pretta astrologia giudiciaria. Il Perelli nella sua orazione inauguratoria piena di eleganza latina, d' entusiasmo, d' erudizione e di dottrina fisica, recitata due anni dopo la sua elezione, provò la necessità di restituire il primiero decoro, espose i felici progressi dell' astronomia fatti fin allora, e quanto largo fosse il campo, che ella presentava per farne de' nuovi, animando sè, gli scolari, e tutti gli zelanti della gloria d'Italia a batter questa carriera, in cui sì lodevolmente correvano le due in ogni illustre impresa sempre emule nazioni, l' Inglese e la Francese.

I progreſſi di queſta ſcienza dipendono dal tempo, dalla perfezione dei metodi matematici, e da quella degl' iſtrumenti, i quali poſſon dare un' eſattezza tale all' oſſervazioni, che quelle di pochi anni vagliano aſſai più delle ineſatte di molti ſecoli. Fu pertanto cura del nuovo Aſtronomo di provvedere il ſuo Oſſervatorio di quegl' iſtrumenti, che i più rinomati artiſti Ingleſi eran ſoliti di coſtruire; nè in ciò gli fu avara l'anima grande di Franceſco I., che non ricusò mai ſpeſa alcuna, quando credè che poteſſe ſervire alla gloria della ſua Toſcana. E quanto ai metodi, niuno certamente al pari del Perelli maneggiava gl' inventati fin allora, e niuno più di lui era in iſtato di perfezionare i già noti, e d' inventarne de' nuovi. Quanto poi all' oſſervazioni, la ſua memoria che era una viva biblioteca, e una copioſa raccolta dei più rari libri gliene ſomminiſtravano tal copia, che ſi ſarebbe detto eſſere a lui preſente come in vivo quadro la ſtoria tutta dell' antica e della moderna aſtronomia. A un sì dovizioſo corredo null' altro mancava, che un' iſtancabile pazienza nell' oſſervare e nel notare, e una certa agilità e deſtrezza nel ſaper fare il miglior uſo degl' iſtrumenti. Perchè mancarono queſte doti al Perelli, il ſuo nome non è regiſtrato tra quelli, che chiamanſi i maeſtri della ſcienza, al qual onore poteva con ſicurezza aſpirare ſol che aveſſe ſaputo frenare il ſuo troppo fervido ingegno, che lo portava in un tempo a più e diſparatiſſimi ſtudj. Qualche oſſervazion d' ecclíſſi, una porzion dell' Almageſto di Tolommeo da lui elegantemente tradotta in latino, una ſeconda prefazione fatta per oſſervazioni non ſue, ma di chi gli doveva ſervir d' ajuto, in cui ſi fa la ſtoria dell' Oſſervatorio Piſano, ſono i ſoli ſcritti, che ei conſacrò ad Urania. Ma non credaſi perciò, che la fama di queſt' uomo raro foſſe riſtretta dentro i ſoli confini dell' Italia. La ſoluzion di un ſol problema Ottico di trovar una curva, in cui i raggi di luce, che vi ſi intende

emanata, ritornino ſempre dopo due rifleſſioni ad un punto ſolo preſo nel mezzo, mandata all' Accademia delle Scienze di Francia da chi n'era il Miniſtro in Firenze, fu come l'unghia del leone, da cui il Clairaut, il Bouguet, ed il de la Lande, nomi illuſtri nelle ſcienze matematiche, giudicarono in eſſe potere il Perelli gareggiar coi primi. Queſta teſtimonianza lo fe coraggioſo, o per meglio dire ottenne da lui una meno interrotta applicazione alle coſe geometriche, e potè così ſomminiſtrare all' Eſtenſore d' un Giornal letterario Toſcano la ſoluzione d' alcuni problemi, che un Anonimo Franceſe aveva propoſto ai matematici Fiorentini. La maggior parte di eſſi era di una facilità da incoraggiare anche i volgari geometri, e alcuni eran già ſtati ſciolti. Credè pertanto il Perelli di doverli rendere alquanto più difficili, e di dar loro un' aria di novità, procedendo nella ſoluzione per via più riſtretta, e del tutto differente dalle altre fin allora battute, e in ciò non volle ſervirſi che della geometria lineare, imitando così il gran Newton, il quale benchè benemerito più d' ogni altro dell' analiſi e dei moderni calcoli, ciò non oſtante ſtimò ſempre ed ebbe in venerazione l'opere e i motodi degli antichi geometri fino a dolerſi amaramente, che dopo l'introduzione fatta dal Carteſio del calcolo nella geometria erano a torto quaſi generalmente traſcurati. Quanto però il Perelli valeſſe nella ſinteſi, non ſi può meglio conoſcere, che dalla ſoluzione di quel problema, in cui ſi cerca il raggio di un cerchio, il quale eſternamente tocchi tre altri cerchj, di cui ſian cogniti i centri ed i raggi; problema, che ha meritato un luogo nell' Aritmetica univerſale del Newton, e che, dopo molt'altre antiche e moderne ſoluzioni, è ſtato ſciolto dal noſtro Geometra con magiſtrale ſemplicità ed eleganza. Dopo di ciò ſi volſe ad alcuni dei più difficili e dei più utili problemi meccanici, che ſe foſſero ſtati pubblicati nel loro tempo, avrebbero affrettato i progreſſi della

della ſcienza, a cui appartenevano, e ci ſarebbero ora conoſcere a qual ſegno era capace il Perelli di contribuire a queſti progreſſi. In sì fatte ſcienze le cognizioni ogni giorno più s' aumentano, i metodi ſi ſemplicizzano, e ogni età aggiunge qualche coſa alle ſcoperte dell' età precedente. Onde è che chi non fu ſollecito a dar ſuori le proprie, merita che i poſteri non abbian cura di ricercarle, perchè non poſſon più ſervire alla loro iſtruzione, eſſendo la ſoſtanza di eſſe non ſol paſſata, ma anche creſciuta negli ſcritti di coloro, che ai medeſimi ſuccedettero. Uno ſpirito creatore, com' era quel del Perelli, non isdegnò di trattare ancora coſe puramente elementari per ſervire all' altrui iſtruzione; e merita ſpecialmente d' eſſer ricordato un trattato delle ſezioni del cono, che ottenne da lui chi preſedeva in nome di Ceſare alla Toſcana per uſo di un ſuo figliuolo, il quale deſtinato a gran fortune pei meriti del padre e pei proprj talenti, credè di non poterli meglio coltivare, che cogli ſcritti e colla voce dei Profeſſori di Piſa. Ella è ugualmente rara tra dotti l'arte di ſapere profittare dei lumi degli eguali o dei ſuperiori, come è l' arte di ſaper comunicare i proprj agl' inferiori. Se uno ha difficoltà per un certo amor proprio a ricevere, ne ha ancora maggiore a dare con facilità e modeſtia, cui rare volte inſpira la ſicurezza della propria ſuperiorità. Queſte due doti erano poſſedute ſovranamente dal Perelli. Egli entrava in quello, che era propoſto dagli altri, come ſe non aveſſe ſaputo che quella tal coſa, ma con una ſpecie d' omaggio, che lungi dall' offendere, luſingava anzi que' pochi che erano in iſtato d' iſtruirlo, e rare volte accadeva, che non aggiungeſſe qualche coſa all' altrui idee. Quando poi doveva comunicare le proprie, lo ſaceva con una chiarezza e naturalezza mirabile, e ſenza abuſar d' alcuno, non ſi negò mai ad alcuno, e coll' iſteſſo impegno parlava col giovane principiante e coll' uomo conſumato. Così la ſua caſa fu quaſi

in ogni ora aperta a tutti, e se non potè mai ottenere da sè di prestarsi ai regolari doveri della pubblica scuola, compensò questa mancanza con istruzioni continue, che erano tanto più premurosamente ricercate, perchè senza il più piccolo fasto Accademico sembravano, e realmente lo erano, tante familiari conversazioni. Questa facilità e naturalezza dipendeva in gran parte dalla semplicità de' suoi costumi e dalla bontà del suo carattere, cui non poterono mai alterare nè il profondo sapere, nè il rispetto, nè la lode degli uomini. Ei non voleva che servire all' utilità di questi con una maniera tutta sua, che non poteva dispiacere se non a certe anime piccole o soverchiamente scrupolose, che pongono i doveri tutti della società nell' ordine e nella regolarità delle occupazioni. Tra le utilità, che apportò il Perelli agli uomini, non fu l' ultima quella della felice applicazione del suo profondo saper matematico all' idrostatica. Disgraziatamente per l' Italia ella ha sovente bisogno di chi regoli l' abbondanza delle sue acque, e provvegga alla sicurezza di quei popoli, che l' abitano, massime da che il vario interesse di differenti Principi, che dominano in essa, e le operazioni dal lor voler prodotte, han cangiato per tal modo il natural corso delle medesime, che senz' arte mal potrebbero contenersi dal non sommergere intere provincie. Da questa necessità è nata una scienza tanto propria degl' Italiani, che non dividono con altri la gloria d' averla creata e promossa. Il Perelli formato nella scuola del Grandi e del Manfredi, ai quali tanto è debitrice questa stessa scienza, doveva aver la gloria, e l' ebbe in fatti, di avanzarne i progressi. Si può dire che dopo l' estinzion di quei gran lumi non vi fu affare di rilievo, in cui egli non fosse o adoperato o consultato. Il maggior bene per altro apportato dal Perelli mediante la sua scienza idrostatica, lo provò la Toscana, che ricorderà sempre con animo grato *il Ragionamento sopra la campa-*

gna Pisana, *la Relazione sopra il modo di liberare la campagna del Valdarno inferiore dall' inondazioni dell' Usciana*, l' altra *Relazione della maniera di dare scolo alle acque stagnanti del Pian del Lago*, che fanno una parte del volume IX. della *Raccolta d' Autori*, *che trattano del moto dell' acque* pubblicato in Firenze l' anno 1774. Se Pisa e la sua campagna avessero scoli più facili per le acque e proprie e straniere, che vi son portate dai fiumi Arno e Serchio, sarebbe certamente una delle più floride e fertili provincie d' Italia. Ma la poca inclinazione del terreno verso il mare, e lo scorrer che fanno quei due fiumi in letto o superiore o eguale al terreno medesimo, producono in diverse parti sì forte ostacolo al moto delle sue acque naturali, che queste sono sottoposte a frequenti stagnamenti, altri temporali, altri perpetui; oltre di che è sì grande tal volta la copia dell' acque straniere, che il loro inondamento arreca danni e pericoli gravissimi. Come questi mali, poichè il rimoverli è impossibile, si possano scemare, e si possa migliorar la condizione della campagna tutta, l' insegna per tal modo il Perelli, che niuna cosa sembra essere alla sua avvedutezza sfuggita. Nè solamente espone il proprio sentimento, ma esamina anche l' altrui, riportando ogni proposizione ai principj della scienza. Se s' ingannò qualche volta nel calcolar la somma della spesa (imperocchè chi può prevedere gli ostacoli tutti, cui apporta la natura, o la malizia, o la negligenza degli uomini?) come accadde nel taglio d' Arno in vicinanza di Pisa, nel foro del monte, per cui dovevano scolarsi le acque del Pian del Lago, e in altre operazioni; furon però sempre queste dirette da un saper profondo e da un' illuminata prudenza, che sa distinguere nell' incertezza di molte dottrine e nella varietà di molte sperienze il vero dal verisimile. Noi ricordiamo il Ragionamento sopra la campagna Pisana in tempo, che la Repubblica di Lucca ha consultato i più abili i-

droſtatici dell' Italia per ſapere qual ſarebbe il modo il più facile e il meno diſpendioſo da condur le acque, che ſcolano nel lago di Bientina, al mare; e chi ſa che nella diſcrepanza dei pareri e nella difficoltà d' eſeguirli non ſia finalmente coſtretta di abbracciar quello propoſto in detto Ragionamento dal Perelli, che è di far traverſare quelle acque per mezzo di una volta ſotterranea l' Arno, e di ſcaricarle nel più baſſo letto del Calambrone? Sarebbe poi coſa lunga a ridire le utilità tutte, che furono una felice conſeguenza dell' idee eſeguite del Perelli, e che egli eſpoſe o negli ſcritti di ſopra ricordati, o in altri, che non videro la pubblica luce *. E ſervivagli mirabilmente a ciò la notizia dell' antichità per paragonare lo ſtato preſente col paſſato, e per dedurre da queſto paragone i rimedj i più opportuni: ed una prova ne ſia la lettera al Senatore Buondelmonti intorno all' inondazioni d' Arno e ai mezzi per ripararvi, in cui ſi fa la ſtoria di tutte le piene, dalle quali la più bella delle città d' Italia fu più volte miſeramente deformata. Così potè convincere d' errore coloro, che ſoſtenevano rialzarſi di più braccia il letto d' Arno nel corſo di un ſecolo, ed eſſere più frequenti e più deſolanti le inondazioni di queſto fiume nei preſenti, che nei trapaſſati tempi; e potè altresì più apertamente provare che ſarebbe riuſcito inutile, e in alcune cir-

* Non ſarà diſcara una nota di quelli, che ſono a noi pervenuti.

Relazione ſopra il fiume Marroccia pel Sig. March. Antonio Niccolini. = Sopra una nuova inalveazione della Girotta. = In cauſa Silvatici e Norci. = Intorno alla macchia di Pietraſanta. = Sopra il foſſo reale. = Sulla quantità dell' acqua della fonte Donata ſotto Treggiaja. = Sopra il mantenimento del foſſo di Ripafratta. = Sopra l' unione dell' acqua della Barra, Foſſa Nuova, Foſſa di Malaventre ecc. = Sopra la bonificazione del padule del Bellino. = Sopra le oppoſizioni fatte al ſuo progetto intorno all' emiſſario del lago Traſimene ſtampato in Firenze l' anno 1771. = Sopra le colmate dell' Ajaccia e del piano d' Acquaviva in Valdichiana. = Sopra il taglio d' Arno, e voltata di eſſo in Barbarecina. = Sopra il progetto del canale navigabile da Firenze fino allo sbocco di Ombrone.

costanze ancora dannoso il divertimento di una porzion dell' acque nella parte superiore alla città. Si sarebbe voluto da lui non solamente l' esame degli altrui pensieri sopra questo importante oggetto e l' esposizione dei proprj, il che eseguì copiosamente, ma ancora una geometrica determinazione di pendenza e larghezza, per le quali un fiume nel suo letto si riduce in uno stato di permanenza inalterabile: ma confessò esser questo un problema tanto difficile, che tutte le dottrine fin allora acquistate nella scienza dell' acque correnti erano insufficienti a risolverlo. Tra tutte le mutazioni però, che per legge di natura o per opera umana han sofferte i diversi fiumi dell' Italia, niuna havvene forse maggiore di quella accaduta al Po ed al Reno, per la quale le tre provincie di Bologna, di Ferrara, e di Ravenna, le più amene, le più fertili e forse le più popolate dello Stato Pontificio han ricevuto danni gravissimi, e ne temono anche dei maggiori. Le controversie poi nate per rimediare a questi mali sono state sì lunghe, sì varie, e sì vive, che posson dirsi d' aver servito se non al sollievo di quelle provincie, certamente al progresso e perfezione dell' architettura dell' acque. Anche il Perelli ebbe parte in esse, allorchè fu prescelto ad assistere come matematico il Card. Pietro Paolo Conti, a cui era stato commesso di visitare diligentemente quell' estese regioni, e di provvedere alla loro salvezza. La Relazion del Perelli a questo illuminato visitatore non si diparte mai dai principj universalmente ricevuti d' idrometria; e nella necessità di condurre il Reno unito col rimanente dei torrenti del Bolognese e della Romagna per un sol alveo al mare, reputato unico rimedio a tanti mali, propone quella linea, che poi in gran parte felicemente eseguita da un franco domatore dei pubblici mali e pregiudizj ha provato la singolar prudenza del suo Autore. Appena meriterebbero d' esser ricordate le opposizioni fatte alla Relazione del nostro Idrostatico, per-

chè dettate più da umane paſſioni, che dall'amore del vero, ſe la riſpoſta, che ei dette alle medeſime, non apparteneſſe al corredo della ſcienza dell' acque. Alla quale mentre ſerviva viaggiando per diverſi luoghi, che doveva viſitare, da per tutto ricercava monumenti d' antichità, opere d' eccellenti artiſti, e ſpecialmente pittori, ſcultori, ed architetti, de' quali conoſceva il bello ed il buono, rari manoſcritti e libri, facendo di tutte queſte coſe e di altre ſimili ſua cura e delizia. Nè ricuſava richieſto d'eternar la memoria di qualche fatto o perſona con eleganti iſcrizioni Latine, o di ſupplire l'antiche, nel che era di una mirabile ſagacità, baſtandoli poche lettere per indovinare o le corroſe o le ſmarrite, o d' interpetrare quelle che eran reputate della più difficile intelligenza. Tra queſte ci piace di ricordare la più celebre di tutte per la ſua antichità, che fa un ſingolar ornamento del ricchiſſimo muſeo Nani, e intorno la quale ſi ſono occupati gl' ingegni dei più valenti antiquarj. La inſolita forma delle lettere, con cui è ſcritta, ne rende incerto il ſenſo, e penſa il Perelli, che eſprima il dono di un tripode fabbricato da Trifone, ed offerto da Ecfante ad Apollo. Alla maniera degli antiquarj rende ragione d' ogni ſuo detto, e lo fa con quella copia di Greca erudizione, che ſerve unicamente all' argomento, non alla pompa dello ſcrittore. Promette in fine dell'operetta altre ſpiegazioni d'iſcrizioni Greche; ma poichè in ſue letterarie promeſſe era ſovente vano lo ſperare, non valſe la nojoſa importunità di chi lo ſtimolava ad arricchire di queſti doni una ſua Miſcellanea a vincere la naturale incoſtanza del medeſimo. Nè tampoco riuſcì a me di vincerla per ottenere una compita edizione dell' opere inedite del Torricelli, l' autografo delle quali mi era fortunatamente venuto alle mani, nè altri lavori, ch'io credeva poter ſervire alla gloria dell' Univerſità di Piſa, a cui con vincolo comune eravamo legati. Una Memoria ſul mo-

do di migliorarla, un' altra full' erezione di una nuova cattedra d' idroftatica, e fulla opportunità dell' agro Pifano per fare in grande l' efperienze appartenenti alla fteffa, varj eftratti di opere matematiche, e la foluzione di alcuni problemi barometrici propofti dal P. Fontana, che furono da me inferiti nel Giornal Pifano, fono i foli fcritti, i quali a fatica impetrai dal medefimo, e di cui il debito di gratitudine ne efige da me un' onorevol ricordanza. Ma fe è intereffante il conofcere l' opere di un gran genio, come quelle che determinano il giudizio, che fi deve formare dei fuoi talenti, non è meno importante lo fpettacolo della fua condotta, dei fuoi coftumi, e per fino delle fue debolezze, dalle quali, come da una fcuola di filofofia, fi poffon cavare utili infegnamenti. Già fi fa, che o la gloria, o l' intereffe, o tutti e due infieme fono i due grandi ftimoli, che fanno agire gli uomini; e le perfone di lettere non fono efenti dal pagare quefto tributo all' umanità. La femplicità dei coftumi, che fu propria del carattere del Perelli, doveva allontanar da lui, come lo allontanò, il defiderio d' accumular denari. Egli era povero non oftante un' annua provvifione di fopra 400. fcudi, che ritraeva dall' Univerfità, e una rendita vitalizia di 240, perchè foddisfatto che egli aveva il defiderio di acquiftar libri rari in ogni maniera di fcienze, e qualche iftrumento matematico, ed in fpecie aftronomico, che mai non adoperò, null' altro curava, e rinunziando fenza avvederfene ai comodi della vita, dava a ciafcun di quelli, che lo fervivano, o lo frequentavano, il dritto di partecipare del frutto delle fue fatiche. Si farebbe detto che non conofceva l' ufo e il valore della moneta, fe non allor quando per foverchia generofità o inconfideratezza mancava del neceffario. Se fu il Perelli efente dall' amore dell' intereffe, non lo fu egualmente da quel della gloria, che fecondo l' efpreffion di Tacito è l' ultima paffione dei fapienti. Nel foddisfarla era lon-

tano non meno da quella delicatezza d' amor proprio, che è un vero supplizio per molti dotti, perchè non soffre la più piccola contraddizione, come da quegli artifizj, che tanti e tanti impiegano per ottenere i suffragj del pubblico, e da quella vil gelosia, che ci fa deprimere il merito altrui per inalzare il proprio. Il Perelli giusto verso degli altri, domandava per sè la medesima equità; e persuaso, che il numero dei buoni giudici in ogni scienza ed arte è piccolo, si contentava dell' approvazione di persone illuminate, abbandonando tranquillamente il rimanente alla loro ignoranza o invidia. Fu però in lui una sorta di contraddizione, di cui con difficoltà si può render ragione, ed è che non essendo esente dal desiderio di fama, trascurasse poi di condurre a fine e di dare al pubblico quelle produzioni che gliene avrebbero accresciuto ed eternato il possesso. Una certa natural pigrizia, la varietà dei suoi studj, e la stessa fama, che godeva in Toscana di non aver pari nelle scienze matematiche, e pochi eguali nella varia erudizione e nella cognizione della Greca lingua, e che ammorzava, se pur non toglieva affatto in lui l' operoso sentimento di emulazione, sono a mio credere i motivi, che han privato la posterità dei frutti, che il singolar talento del Perelli avrebbe potuto produrre. Pien di rispetto per l' antichità non sapeva accomodarsi ad un certo gusto dominante, che divenendo ogni giorno più stravagante par che annunzi la vicina decadenza delle lettere; onde se o per servire a sè medesimo o alle richieste d' amici compose qualche cosa in proposito d' amena letteratura, proccurò sempre, e l' ottenne mirabilmente, che ella avesse impresso il carattere della grandezza, facilità, ed eleganza antica *. Non deve far maraviglia che avesse il Perelli per gli altri

* Darem qui un saggio del valore del Perelli in poesia Latina e Greca.

altri l' indifferenza, che aveva per se medesimo. Lo spettacolo vario delle passioni, che agitano gli uomini diverte la

---

Per l' Obelisco, che si voleva alzare in monte Citorio da Benedetto XIV.

Ille olim Augusto metitus Caesare soles
Niliacus jacuit saecula plura lapis;
Praesule nunc idem Benedicto surgere jussus
Admonet antiquos, Roma, redire dies.

Sopra la Signora Sofia N. N.

Dum spectat Juno Sophian, auditque loquentem,
Vincor, ait, nec de judice victa queror.
Una trium nequeo junctis certare duabus,
In Sophia Pallas jungitur atque Venus.

Per la morte di un giovanetto.

Traduzione dal Greco.

Nuntia Persephores, ales Cyllenia, qualem
Ducis ad infernos, tristia regna, lacus!
Sorte mala eripitur luci septennis Ariston,
Quem tenet & medium spectat uterque parens.
Si te cuncta manent quot sunt mortalia, Pluto,
Poma quid immiti carpis acerba manu?

Traduzione del Sig. Metastasio.

O della Dea d' Averno
Mercurio messaggier, dal cieco mondo
Chi mai conduci al tristo orror profondo!
Di sett' anni Aristone
Dalla barbara Parca al ciel rapito,
Che in mezzo ai genitori è qui scolpito.
Oh se d' ognun che nasce
La matura vendemmia a te si serba,
Pluto crudel, perchè la cogli in erba?

Sopra un dito del Galileo staccato dal suo cadavere.

Lipsana ne spernas digiti quo dextera coeli
Mensa vias, nunquam visos mortalibus orbes
Monstravit parvo fragilis molimine vitri.

maggior parte de' filosofi, e come Democrito, molti ne ridono. Ma il Perelli non sol non si burlava del ridicolo de' suoi simili, ma nè pur si degnava d' osservarlo; sorta d' indulgenza, che se fosse stata a lui concessa, non si ricorderebbero ora con riso alcuni avvenimenti, che furono l' effetto di una soverchia credulità unita al desiderio di piacere per fino al bel sesso. Si rammenta ancora la singolarità delle sue astrazioni. Imperocchè pensava ordinariamente nel mezzo di una conversazione, di una camera piena di gente, e anche in compagnia di Dame. Faceva naturalmente e senza affettazione quello, che per una prova o per una ostentazione delle sue forze era solito di fare un antico filosofo, che si ritirava in un pubblico bagno per meditare. Quantunque però alcuni si burlassero di queste distrazioni di mente, non per questo lo rispettavano meno, e tutti ricercavano avidamente la sua conversazione, perchè era lontana da burbanza e vani-

---

Ausa prior facinus, cui non Titania quondam
Suffecit pubes congestis mollibus olim
Sydereas frustra conata adscendere in arcos.

Per la Signora Ottavia Pepi.

Τὴν ξανθὴν κορυφὴν, ῥοδόεντά τε κύκλα παρειῶν
Καὶ στίλβονθ' ὑγρῷ ὄμματα μαρμαρυγῇ,
Καὶ στόμα μειδιόον δροσερῶν πένον ἥδιον ἄνθων,
Κλόπον τ' ἀρτιπαγῆς λευκότερον χιόνος
Πάντ' ἐσορᾷς Πεπίης εἰ χείροια, μέμφεο τέχνην,
Οὐδέ γραφίς γε τυπῶν ἠέλιον δύναται.

Versione del Sig. Ab. Guarducci.

Flaventes crines, circlos roseosque genarum,
Quaeque udum vibrant lumina viva jubar;
Floribus & ridens vernis os dulcius halans,
Concreta pectus candidiusque nive,
Cuncta vides Pepiae, quae si hic minor, arguito artem;
Nec solem artificis pingere dextra queat.

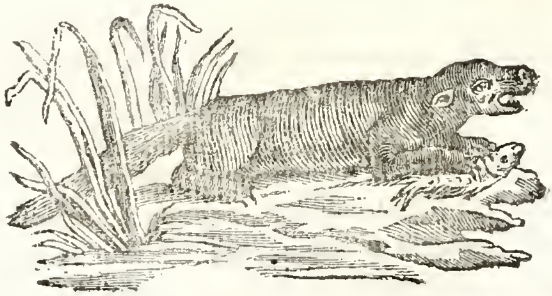
Chi poteva per se medesimo comporre un' antologia, sappiamo essersi ancora occupato in tradurre alcuni epigrammi della Greca.

tà anche quando iſtruiva, e perchè era condita ſpeſſo di ſali e di opportuni racconti di detti e di fatti, e di una naturalezza, bontà, e giovialità che ſeduceva. Nel raccontare una piacevole ſtoria ſapendo, che la fine ne è l' oggetto, ſi affrettava di giungervi, e produceva l'effetto ſenz'averlo promeſſo. E' incredibile la copia di aneddoti galanti, politici, militari, e letterarj che eran ſempre preſenti alla ſua memoria, e ſi ſarebbe detto, che la ſtoria antica e moderna foſſe ſtata l' unica ſua occupazione. Aveva profondamente meditato quello che grandi Autori, come un Locke, un Monteſquieu, un Cheſterſield, hanno ſcritto ſopra la metafiſica, la politica e la morale, e applicando i loro principj alle circoſtanze dei tempi giudicava, e prevedeva con una ſagacità degna di un gran Miniſtro. Era ſolito di dire, che ſi ſarebbe potuto facilmente moltiplicare il numero dei profeti, ſe da perſone illuminate ſi ricercaſſe per tal modo l' origine delle nazioni, delle loro lingue, dei loro coſtumi, delle loro opinioni, e tutto quello, che appartiene alla ſtoria dello ſpirito umano, che ſi veniſſe a ſcoprire una ſucceſſione ed una catena di penſieri, che naſcono nei popoli gli uni dopo gli altri o piuttoſto gli uni degli altri. Egli è certo, che uno ſpirito metafiſico, come quello del Perelli, ſapeva dallo ſtudio della ſtoria cavare certe generali rifleſſioni, che ſembravano inalzarſi ſopra la ſtoria medeſima. Anche la teologia entrava ſpeſſo ne' ſuoi diſcorſi; imperocchè egli aveva letto molti degli antichi SS. Padri, e ſpecialmente Greci, e conoſceva il forte e il debole di quelle diſpute teologiche, che uno ſpirito di partito ha infelicemente ſuſcitate, e che ſenza farci migliori hanno per tanti anni non ſolo occupate le ſcuole, ma anche agitata con grave ſcandalo degli Eterodoſſi la criſtiana repubblica. Egli era aſſai illuminato per non iſpoſarſi ad alcun partito, e perſuaſo delle verità di noſtra Santa Religione, la coltivò con culto più interno che eſterno, quantun-

que però non trascurasse mai anche quegli esteriori doveri che ella prescrive ai suoi seguaci. Ciò non ostante non sono mancati chi dalla sua costante tranquillità e dall' astrazioni, che l' accompagnavano anche nell' adempimento di quei doveri religiosi, che dovrebbero più di tutti escluderle, han preso motivo di mettere in dubbio la religiosità di lui; tanto è vero, che la malignità sa profittar di tutto, e che vi sarà sempre una moltitudine di uomini, che si compiace di abbassare il merito dei gran genj, e di trovare il più leggier pretesto per dispensarsi dal rendere ad essi giustizia. Quantunque non fosse indifferente alle grazie del bel sesso, non pensò mai ad ammogliarsi. Sortì dalla natura una forte complessione, cui solamente nell' età la più avanzata poterono alterare le irregolarità del vivere, la continua meditazione, e l' assiduo studio. Questo divorator di libri, per servirmi dell' espressione, con cui Cicerone caratterizzò M. Catone, quante volte non solo nella propria, ma anche nell' altrui casa fu sorpreso dal nuovo giorno, allorchè erasi abbandonato nella sera alla lettura di qualche opera per lui interessante! E raramente accadeva, che ne disprezzasse alcuna, onde faceva maraviglia, che a un mondo di libri mediocri, e quasi assolutamente sconosciuti avesse accordata la grazia di leggerli. Rare volte prendeva la penna per notare, fidandosi della sorprendente sua memoria, in cui ciascuna idea occupava il posto, che le conveniva, e che lo serviva a segno, che era pronto a rispondere sopra quasi tutte le materie, e a citare i luoghi dei principali Autori che le trattavano. L' abbandonò poi quasi del tutto per l' abuso fattone negli ultimi tre anni della vita, che furon quasi una morte anticipata, perchè fu tolto agli amici, ai parenti, alle sue abituali occupazioni, e per fino a que' sentimenti, che son proprj ancora dell' uomo animale. Questo tristo spettacolo lo dette in Arezzo, che riguardava come sua patria, perchè vi fu ascrit-

ta tra le nobili la ſua famiglia, nel ſeno di cui ſi rifugiò l' anno 1779. Sentì forſe allora già vacillante, o per meglio dire, gli fu fatto ſentire, che l' Univerſità di Piſa non avrebbe potuto più ſervirli, come per lo avanti, di glorioſo teatro; onde dimandò di ritirarſene ſenza ſcapito d' aſſegnamenti. L' ottenne dalla clemenza di PIETRO LEOPOLDO nato alla felicità della Toſcana, e al ſollievo de' miſeri, perſuaſo che da una paleſtra, dove tutto deve eſſere ſtimolo alla fervida gioventù per correre vigoroſamente la difficile e lunga carriera degli ſtudj, deve allontanarſi la viſta di quegli oggetti, che ne potrebbero troppo ſenſibilmente paleſare la vanità. Finalmente un' apopleſſia tolſe affatto il Perelli al mondo nel dì 5. d' Ottobre dell' anno 1783. E' a noi venuta dall' antichità la moda di far paralleli, e chiuderemo queſt' elogio col farne uno, che ſorprenderà a prima viſta, e che ci farà reputare per troppo parziali della memoria del Perelli. Non dubitiamo di porlo a lato del gran Leibnitz, di quel raro e mirabil genio, che come ſcriſſe grazioſamente il Sig. de Fontenelle, ſimile agli antichi, che avevan l' abilità di condurre fino a otto cavalli di fronte, conduceva anche egli di fronte tutte le ſcienze, e che ſcompoſto e diviſo in tutte le ſcienze, che ſapeva, di un ſol uomo ſi ſarebber fatti più dotti di prima sfera. Il Perelli, come Leibnitz, aveva del guſto e del talento per la poeſia, era verſatiſſimo nell' antichità, era profondo nella ſtoria e negl' intereſſi dei Principi, che ne ſono il reſultato, e ſapeva il dritto pubblico con una non leggiera tintura di teologia; come quegli era eccellente filoſofo e matematico e conoſcitore ſommo della ſtoria dei penſieri degli uomini, certamente ſempre curioſa per lo ſpettacolo d' una varietà infinita, e ſpeſſe volte ancora iſtruttiva. A ſomiglianza di lui non ebbe nè fine, nè regola nella ſua lettura, e divenne per così dire tutto quello che aveva letto; ſapeva più lingue morte, e le più culte delle vive,

e da tutto quello che leggeva ed osservava sapeva trar linee di comunicazione, che approssimavano mirabilmente differenti scienze tra loro. Era ancora comune a tutti e due quello spirito metafisico, che sa farsi padrone di tutti i principj più sublimi, e i più generali, e una singolar disposizione a prender tutte le forme, e a ricevere tutte le sorte d' idee. Convenivano anche nella facilità di trattare con ogni genere di persone, cortigiani, artisti, contadini, soldati, ignoranti non men che dotti, persuasi, che da tutti si può imparar qualche cosa, e niun dei due reputò tempo perduto quello che dettero alla conversazion delle donne. Se il Leibnitz superò il Perelli nell' invenzione di nuovi metodi matematici e nell' illustrazione dell' oscurissima storia de' bassi tempi, fu anche vinto dal nostro Italiano in un maggior criterio, che questi portò nelle cose metafisiche, e nella contemplazione della natura, e in un gusto più delicato per tutto ciò che appartiene ad amena letteratura. Ma il Leibnitz lasciò copioso numero di monumenti del suo raro ingegno e sapere, scarsissimo il Perelli, onde si può a ragione temere, che la posterità, la quale sarà eternamente grata al primo, divenga ingiusta verso il secondo, o mettendone in dubbio il merito sovraggrande, o deponendone la memoria.



INDICE DELLE MEMORIE

PRIMA SEZIONE.

PARTE I.

Introduzione a nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' analisi de' fenomeni delle elettriche punte

Del P. Carlo Barletti delle Scuole Pie Professore di Fisica nell' Università di Pavia . . . . . pag. 1

Sopra l'equazione d'una Curva, sopra la falsità di due famosi Teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccioli

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubbli-

co Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia 123

Sopra la pressione de' fluidi

Del Medesimo 142

Indagini nel calcolo integrale

Del Sig. Cavaliere LORGNA 177

Delle progressioni reciproche delle potenze affette

Del Medesimo 210

Esposizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo del Real Presidio di Torino 237

Delle Osservazioni solstiziali, fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782, *e de' loro Risultati paragonandole colle simili Osservazioni del* 1756, 1764, *e* 1775.

Del Sig: Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toscana 256

SECONDA SEZIONE.

Osservazione della congiunzione inferiore di Venere col Sole a dì 20. Marzo 1782. con alcune Riflessioni

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Astronomo all' Osservatorio di Milano 313

Sopra la forza Centrifuga

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella R. Università di Pavia 325

Sopra le Serie

Del Medesimo 386

PARTE II.

Nuova Teoria intorno al movimento de' navigli a remi

Del Sig. Cavaliere LORGNA 457

Memoria seconda ed ultima sopra la riproduzione della testa nelle Lumache terrestri

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia . . . 506

Lettera Prima relativa a diverse produzioni marine

Del Medesimo

Al Sig. Carlo Bonnet Membro delle più illustri Accademie d' Europa 603

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala in particolare

Del Sig. Alessandro Volta Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia 662

TERZA SEZIONE

Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e

Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume

Del Sig. Teodoro Bonati Matematico di Ferrara 676

Dimostrazione della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni*

Del Sig. Sebastiano Canterzani Professore di Matematica, e Secretario perpetuo dell' Instituto delle Scienze di Bologna 720

Saggio di Osservazioni anatomiche intorno agli Organi della respirazione degli uccelli

Del Sig. Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professore primario della medesima e di Notomia

Al Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino 732

Delle formole differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara 749

Memoria sull' equazioni a differenze finite e parziali

Del Sig. Pietro Paoli Pubblico Professore nella Università di Pavia 787

Osservazione anatomica sopra un vitello-vacca detto dagl' Inglesi Freemartin

Del Sig. Antonio Scarpa Pubblico Professore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Università di Pavia 846

Opposizione del Nuovo Pianeta osservata nel 1781.

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore d' Astronomia nell' Università di Pisa 853

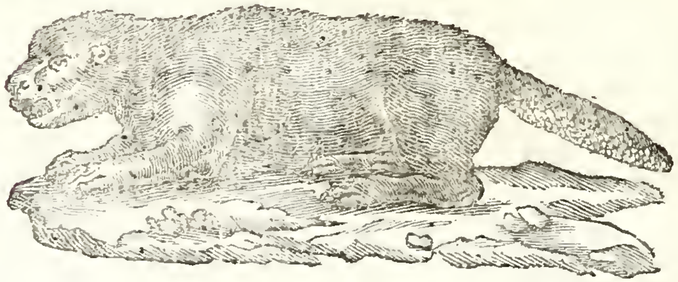
Lettera seconda relativa a diversi Oggetti fossili e montani

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia Naturale nell' Università di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illustri Accademie di Europa 861

Appendice alla Memoria sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala in particolare

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia 900



INTRODUZIONE

INTRODUZIONE

A nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' analisi de' fenomeni delle elettriche punte

Del P. Carlo Barletti delle Scuole Pie Professore di Fisica nell' Università di Pavia.

PARTE SECONDA

SOrgente di fallace evidenza, e di erronee induzioni fu sempre mai in Fisica la prevenzione. Lungi da simili incanti, e da ogni illusorio splendore proseguirò la proposta analisi de' fenomeni delle elettriche punte indipendente da qualsivoglia ipotetica idea, e con tali combinazioni di sperienze, che ne rendano assolutamente distinti, e costanti i risultati in qualunque ipotesi. Sia pur questa la *Frankliniana* d'un solo fluido espansivo nelle due specie di elettricità; o la *Nollettiana* di due materie efluente, ed affluente in una sola specie di elettricità, della quale specie non sieno che gradi varj la vitrea, e resinosa; o la *Simmeriana* di due opposte potenze, dalle quali vengano le opposte elettricità vitrea, e resinosa constituite; o altra, che delle specie stesse determini i caratteri, e le qualità; o in fine qualsivoglia opinione, che con sistematici, e tecnici nomi definisca in alcun modo, e riduca a principj la varietà degli elettrici fenomeni. Tutte le considero in pari grado possibili coteste ipotetiche, e sistematiche idee; e non riputerei, che un vano trionfo tanto l' adottarne, che il ripudiarne una a preferenza dell' altra, se tali preferenze non pervertissero le vie della scienza naturale, e non ritardassero i progressi delle utili e vere cognizioni.

Ad oggetto unicamente di oppormi a siffatti pregiudizj mi permisi in fine della prima Parte alcune riflessioni contro la *Frankliniana* superstizione; e pel medesimo oggetto sul bel principio di questa dichiaro apertamente l' indifferenza mia per

qualſivoglia maniera di ſiſtematica perſuaſione, acciò limpido, e preſto s' intenda, quanto ſieno diverſi i ſiſtemi, e le ipoteſi dalle teorie, e ſi preveda nel tempo ſteſſo di qual forma, e e tempra ſieno que' nuovi teorici principj, ai quali mi propongo di aprir l' adito con l' analiſi delle elettriche punte.

Ed eſaminando a tenore della propoſta diviſione i fenomeni delle punte oppoſte a punte, e delle ſuperficie oppoſte a ſuperficie ne dedurrò come nella prima, così nella preſente ſeconda Parte i particolari corollarj più immediati per comprenderne indi ne' teoremi la generale, e coſtante eſpreſſione. Porgeranno adunque le diſtinte combinazioni delle punte, e delle ſuperficie materia dei primi due capi; e nel terzo coll' appoggio di nuove ſperienze ne eſtenderò l' applicazione alle apparenze di elettrica luce; preparando così la via alla terza, ed ultima Parte, che il termine comprende e dell' analiſi delle punte, e della Introduzione ai nuovi principj dell' elettrica Teoria.

CAPO I.

Combinazioni di punte oppoſte a punte nella reſinoſa, e nella vitrea elettricità.

L' attività della macchina, e la quantità di elettrica potenza, che ſi eccita ad ogni giro del diſco, e ſi eſtende alle varie diſtanze, fu per me in tutte le precedenti, ſiccome pure lo ſarà nelle ſeguenti ſerie di ſperienze, la miſura, e il modulo comune, a cui ſi riducono le proporzioni delle elettriche forze. Niuno, che nuovo affatto non ſia nelle Fiſiche e Matematiche ricerche, ignorar può, che ogni genere di forze, e di effetti non ſi riconoſce egualmente collo ſteſſo modulo, oſſia unità di miſura. Quanto è neceſſaria la riduzione a comune miſura per conoſcere eſattamente le proporzioni di qualunque termine, ed effetto nelle ſerie diverſe, altrettanto è indiſpenſabile di variar miſura per diſcernere tra loro gli effetti diverſi, o gli elementi varj d' un effetto compoſto; poichè ſenza ſimili ripieghi, e varietà ſi compongono inſieme gli effetti diverſi, e gli elementi de' compoſti effetti vie più ſi confondono ſotto certe miſure.

In due modi si presentano gli elementi d' una forza, o di un effetto naturale; o sono quelli già composti, e confusi in ogni parte, o termine, da cui l'effetto risulta; ovvero si compongono, e si uniscono insieme colla successiva addizione di parti, o termini, che compiono, e soggettano ai sensi l' effetto medesimo. Nel primo caso l' ingrandire, o diminuire la misura non porta veruna distinzione in quegli elementi; anzi si rendono essi tanto più confusi, e indiscernibili, quanto si riportano a misure, ovvero a termini soverchiamente maggiori, o minori. Nel secondo caso all' opposto quanto può ridursi più minuta la misura, tanto più idonea diventa per dividere, e discernere que' successivi elementi, che si accumulano per accrescere, e compiere i termini, e lo stato vario del proposto effetto. Talchè siccome nel modo primo prendono in fine l' aspetto di eguaglianza, e similitudine le cose più ineguali, e dissimili, perchè coll' aumento, o diminuzione non si risolvono, nè si distinguono punto, ma soltanto si sommano, o si sottraggono confusi come sono in se stessi i loro elementi; così nel secondo modo si scorgono ne' successivi termini, e gradi separatamente i diversi elementi; e può indi ciascuno paragonarsi con gli altri in ragione, che passano essi dal primo fino all' ultimo stato più composto, e confuso.

A norma di sì giusti principj, che mi basta qui di accennare, non solamente variai le preparazioni, e le combinazioni di sperienze, ma in ciascuna preparazione, e serie applicai ordinatamente a tutti i termini la varia attività della macchina, e la minima, e la massima quantità di elettrica potenza, che ad ogni giro del disco m' ingegnai di eccitare con uniformità di successione, per ottenere così distinti non solo i confronti d' ogni termine, ed effetto diverso colla comune misura, ma di più i confronti delle misure diverse con ogni termine, ed effetto comune. Poichè in fine le misure, e i confronti sono le sole vie d' ogni distinta idea.

CON ELETTRICITA' RESINOSA.

Preparazione.

Un disco assai maggiore del consueto, che usai nelle serie precedenti, mi porge ad ogni giro tanto più grande elettricità, che quindici soli giri bastano per imprimere nel solito quadro verticale descritto nella prima serie viva forza di carica; e collo stesso numero di giri s' induce verso gli ultimi giri del disco a scarica spontanea una boccetta, che mi serve continuamente di confronto, e di prova per i successivi termini d' ogni serie. Di questo disco, e di quindeci giri faccio uso in ogni termine della presente, e delle seguenti serie, quando non avviso altrimenti di averne scemata l' attività, o fatto cambio con altro minore.

La boccetta poco fa indicata non solo mi porge, siccome accennai, il confronto per la successiva attività della macchina, ma di più nel cavare la scarica dal quadro mi somministra una misura della quantità, o grado di ciascuna carica, che alle varie distanze corrisponde: della quale nuova maniera di misure parlerò in seguito più distintamente.

Non ommetterò qui di spiegare il giuoco, ossia la pratica di tale misura. In vece di cavar dal quadro la scarica applicando prima, come si usa, un capo dell' arco alla faccia esteriore, e appressando poi con prontezza l' altro capo all' anteriore armatura, tengo in mano quest' ultimo capo dell' arco, e lo stringo sull' esteriore armatura di quella boccetta, che tengo insieme impugnata. E presento poi all' anteriore armatura del quadro quel globo, che fa la comunicazione, e il termine dell' interna armatura della boccetta; sicchè non può se non attraverso di questa boccetta trarsi dal quadro la scarica. Così in vece di trarre tutto insieme la scarica dal quadro, si divide questa nella boccetta, che scarico immediatamente servendomi dell' arco stesso. E replicando lo stesso atto di prima sul quadro, si divide nuovamente quel primo residuo di scarica nella boccetta, che scarico similmente a parte coll' arco. Con tali atti replicati esaurisco in fine l' intera carica impressa nel quadro; ed intendo, che questa si esau-

risca, quando più non imprime carica sensibile nella frapposta boccetta. Ed è col numero di tali atti, che io misuro la carica impressa nel quadro nelle varie distanze; e s' intenderà sempre in questo senso, quando dico *finì*, o si *esaurì* la carica in quattordeci, in dieci, in quattro, in una scarica della boccetta.

L' isolamento in questo apparato è per ogni verso perfetto di quattordeci pollici. Nel rimanente replico la *preparazione* della serie prima collo stesso tubo, e punta, e quadro similmente opposto, e con resinosa elettricità. Per introdurre ampia comunicazione dell' esteriore armatura col suolo, applico alla stessa ai fianchi due fili metallici, che col suolo comunicano. Serve questa serie di vincolo, e di mezzo termine delle precedenti colle seguenti; e comprende in oltre in se stessa nuovi fenomeni, ai quali non si ebbe verun riguardo nella serie prima, e perciò si computa in ordine come serie distinta.

SERIE 5.

1. Dal contatto del quadro colla punta fino alla distanza d' un pollice s' impresse nello stesso con quindeci giri carica presso a poco eguale, che si finì con quattordeci scariche della boccetta.

2. A' pollici due finì in tredeci; ai quattro in dodeci; ai pollici otto in nove; ai quattordeci in cinque; ai diciotto in tre; ai ventiquattro in una scarica della boccetta: ai trenta pollici tentando la scarica del quadro non è più capace d' imprimerne veruna parte nella boccetta, e non ne mostra se non l' ultimo grado applicando l' arco immediatamente alle opposte armature del quadro stesso; nel quale alcun sospetto di luce pungente arriva talvolta a sentirsi fino ai pollici trentasei. Se però ai trenta pollici finisce la serie della scuotente forza impressa nel quadro, non finiscono i moti del pendoletto cadente lungo la sua armatura opposta alla punta. Hanno que' moti distinta espressione pel confronto delle serie seguenti, e per l' applicazione de' corollarj alla generale teoria. Perciò ne ripiglieremo l' osservazione dal contatto fino alle più rimote distanze per determinare così senza ambiguità i no-

mi, che comunemente si usano troppo confusi di elettrica *ripulsione*, *attrazione*, *e adesione*.

3. Posta la punta in contatto dell' armatura al primo girar del disco oscilla, e si agita rapidamente il filo del pendoletto intorno alla punta, e s' inalza, e si estende un seno del filo stesso secondo la lunghezza della punta. Indi finchè si gira il disco tanto il filo, come il globetto si combacia con forza coll' armatura stessa, e similmente si combacia lungo la punta quel seno, che sporge dal filo.

Abbiamo pertanto nelle parti dello stesso filo due adesioni contemporanee, una del globetto e della maggior parte del filo coll' armatura, l' altra col corpo della punta per quel seno del filo, che in fuori lungo la stessa si estende.

4. Per discernere da qual cosa dipendano, e d' onde nascano queste due adesioni, osservo, che finiti i giri cessano esse immediatamente; e il filo si tende, e resta vibrato in fuori dalla faccia del quadro in proporzione della carica impressa. Onde si conclude, che dipendono, e nascono dalla azione stessa, che si eccita coi giri del disco.

5. Ma per distinguere, se quelle adesioni derivino dalla sola azione della punta, o da altra azione insieme procedente, o accumulata dal quadro; e per tentare in oltre qual cosa abbiano di comune, e quali modi, o cause distinte; mentre si gira il disco io tocco insieme colle dita le due opposte armature del quadro, sicchè da questo possa sol tanto procedere qualche azione, ma non possa in esso accumularsi. E succedono quelle oscillazioni, che notai da principio, del filo intorno al corpo della punta; anzi crescono quelle assai notabilmente, e il filo, e il pendolo s' inalza, e si estende per fino al tubo lungo la punta, colla quale tutto talvolta si combacia in certa dose di elettricità. Talchè in questo stato del quadro per quanto continuino i giri del disco resta sempre qualche adesione del filo, e del globetto colla punta, o col tubo; e niuna mai del filo, nè del globetto coll' armatura del quadro.

Indi concludo, che l'adesione della parte del filo al corpo della punta dipende dall'azione dei giri per la via della punta, o del tubo, e da qualche cosa, che procede dal quadro, ma non da ciò, che sul quadro si accumula.

6. E viceversa l' adesione del filo, e del pendoletto coll' armatura del quadro, siccome non sussiste, che nella successione dei giri, nè mai ha luogo, nè si mantiene se non senza quel contatto delle opposte armature, il qual contatto impedisce ogni accumulamento di azione, e di carica nel quadro; perciò l' adesione stessa dipende dall' atto, con cui si fa quella successiva accumulazione nel quadro.

7. Ma non perciò nasce dalla materia stessa nel quadro accumulata. Poichè col finir dei giri, benchè quella materia accumulata sussista, più non sussiste con essa nè la prima, nè questa adesione. Che anzi si scosta il pendolo e dalla punta, e dall' armatura, e passa in divergenza dall' armatura, della quale divergenza parleremo più opportunamente nella serie seguente.

8. Seguiterò in questa serie a notare gli accidenti delle adesioni, e de' moti nelle successive distanze. Scostando il quadro segue nel cominciar dei giri l' agitazione, e segue indi il combaciamento del filo sull' armatura fino oltre la distanza di quattro pollici; e quel seno ristretto, e sporto in fuori si fa or più, or meno esteso, e si dirige quasi che fosse un' altra punta secondo l' asse della punta del tubo. Ma al di là dei quattro pollici comincia quel seno a gonfiarsi, e si stacca così il filo dall' armatura a poco a poco nelle ulteriori distanze, finchè tutto il filo si gonfia in arco verso la punta, restando, come è per la superior parte, attaccato all' armatura, e rimanendo il pendolino aderente verso il fondo dell' armatura stessa, quasi che ivi pure fosse attaccato.

9. Quando però arriva verso i limiti dell' isolamento ai quattordeci pollici finisce anche l' adesione del pendoletto, e questo insieme col filo si vibra in fuori dell' armatura verso il tubo con grande divergenza, finchè continuano i giri del disco. Finiti questi succede qui al contrario di sopra al numero quarto. Poichè ivi col finir dei giri passa dall' adesione ad ampia divergenza; qui cade col finir dei giri, e resta quasi inerte soltanto teso dal proprio peso; se non che ritiene alcuna tenue divergenza in proporzione della carica, che a tale distanza ancor s' imprime nel quadro.

10. Nelle successive distanze poi, ove la carica è minore, e poi oltre i trenta pollici, ove è nulla, continua nell' atto

dei giri a mantenersi vibrato ampiamente, ma col finir di essi cade affatto, come inerte.

E' una tal divergenza notabile fino ai pollici trenta sei, indi si fa successivamente minore; e ai quaranta non oltrepassa più d' un pollice e mezzo la distanza dall' armatura; e finalmente ai cinquanta pollici si riduce lo scostamento a poche linee, e più in là non è d' ordinario sensibile.

11. E siccome nelle minori distanze notate al numero quinto ha luogo l' adesione del filo alla punta, e al tubo fino verso i limiti dell' isolamento; così nelle maggiori ha luogo nell' atto dei giri l' inclinazione, o tendenza dello stesso filo verso il tubo, anche quando si toccano in tal atto insieme le opposte armature del quadro.

12. Nè si debbe lasciare di ben distinguere questa tendenza da quella, di cui parlai al numero quarto, e settimo. Che questa non ha verun rapporto a ciò che nel quadro si accumula, mentre sussiste nelle maggiori distanze, quando nulla giammai si accumula nel quadro, e quando pel contatto delle armature nulla può accumularsi, e sussiste soltanto insieme ai giri, e colla continuata azione della punta, o del tubo; e perciò si dice *attrazione* del tubo. Quella per opposto non è se non proporzionata a ciò, che nel quadro si è accumulato di carica; e siccome sussiste finiti i giri, non sembra punto dipendere dall' azione, o presenza del tubo, e perciò si dice *ripulsione* del quadro.

OSSERVAZIONE I.

Ritenendo la stessa attività della macchina variai in due modi l' opposto quadro. Sostituii in vece del primo sottile un altro di eguale grandezza in superficie armata, ma di grossezza assai maggiore; e la carica a distanze eguali al primo s' impresse in questo notabilmente minore. Indi posta eguale la grossezza del vetro, variai la grandezza di superficie del vetro armato; e trovai, che quanto la superficie armata si fa minore tanto più prontamente a distanze eguali al primo ascende a maggior vivacità, e si accosta al sommo in proporzione della capacità la carica impressa. Per opposto niuna carica s' imprime nei quadri più grandi a tali distanze dalla punta,

ta, alle quali ancor ſi carica una bozzetta, o un quadro aſſai piccolo.

Onde ne ſeguono due corollarj

1. *Nei più ſottili quadri ancor s' imprime alcuna carica colla ſteſſa elettricità, e alle ſteſſe diſtanze, nelle quali niun cenno ſe ne imprime nei più groſſi quadri.*

2. *Ed i quadri di minore armatura ancor ricevono carica con tale forza di elettricità, e a tali diſtanze, nelle quali nulla ne ricevono i quadri di più eſteſa armatura.*

OSSERVAZIONE 2.

Dovrebbe in oltre provarſi in ſimile ſerie la varietà delle paſte, o doſi de' vetri, o criſtalli diverſi ſotto le medeſime dimenſioni, e diſtanze, e dovrebbero ridurſi a dimenſioni eguali altre lamine di varie ſoſtanze atte a ricever la carica, come le reſine, i zolfi, e ſimili per ſoggettarle del pari a tal ſorta di ſperienze, e riconoſcerne la riſpettiva capacità fra loro, e con le eguali lamine di vetro. Naſcerebbero così inſieme alle due della precedente oſſervazione quattro nuove ſerie di ſperienze, cioè la prima dei quadri variati nella ſola *groſſezza* del vetro; la ſeconda dei medeſimi variati nella ſola *grandezza di ſuperficie armata*; la terza delle varie *paſte*, o *doſi* di vetri nella ſteſſa groſſezza, e grandezza: la quarta in fine di ſomiglianti lamine di tutte le *ſoſtanze dal vetro diverſe*, che atte ſono a ricever carica. Ardua per verità, e lunga è la via nella preparazione, e nel compimento di tante ſerie; ma fuori di queſta altra non ve n' ha, che ſtia fra i confini del vero.

OSSERVAZIONE 3.

Oltre alle due prime ſerie, che nella prima oſſervazione incominciai, e le due altre, che nella ſeconda non feci che proporre da farſi, ne ho cominciata una nuova ſerie, che ſu tutte le precedenti ſi eſtende; ed è il cangiamento di attività nella macchina per ridurre così gradatamente minore l' elettrica quantità procedente dal tubo, e dalla punta. Trovai in tal modo, che *quanto ſi fa minore l' elettricità, tanto diventa più*

insufficiente ad imprimere carica ne' quadri più grandi in pari distanze, che in altri minori; e in fine posta certa grandezza del quadro, neppure a contatto più non s' imprime verun cenno di carica collo stesso numero di giri, che è sofficiente per far carica notabile in un quadro minore.

OSSERVAZIONE 4.

Ed a questa differenza di carica impressa con la minore elettricità corrispondono le differenze de' moti nella quinta serie descritti principalmente ai numeri terzo, ottavo, e seguenti. Poichè quel filo del pendolo, che con forte elettricità si comprime sull' armatura, e stende suori un seno ristretto in forma di punta, quel filo stesso appena nelle minori distanze si gonfia, e poi non fa che vibrarsi in fuori, quando l' elettricità della punta è assai debole, nè è capace d' imprimere se non tenue, o niuna carica nell' opposto quadro. Talchè *accade in proporzione con minore elettricità nelle minori distanze lo stesso, che con maggiore elettricità succede nelle distanze maggiori.*

OSSERVAZIONE 5.

Tentai in questo stesso degradamento di attività della macchina, se con minore quantità di eccitamento si potessero nel quadro imprimere cariche proporzionali a quelle, che con maggiore s' imprimono; e se coll' accrescere tanto più il numero de' giri, quanto è minore l' eccitamento, si ragguagliassero al fine le cariche. E qui riconobbi più che mai fallace il ragionar per analogia. Poichè ben lungi da simili ragguagli col reciprocare il numero de' giri alla quantità di eccitamento non incontrai di fatto se non aberrazioni da tutto ciò, che sembrava più conforme all' analogia, e al raziocinio. Il che m' indusse a diffidare di quelle semplici, e facili ragioni, e leggi, alle quali pur si vorrebbero ridurre gli elettrici principj. *Simili aberrazioni sono prove dirette della falsità, e insufficienza de' principj, che si suppongono semplici.* Non è l' analogia che c' inganni; ma noi vogliamo ingannarci soggettando alla semplicità delle nostre suppoſizioni i complicati fenomeni della natura.

PREPARAZIONE.

Fiſſo nell' armatura del quadro una punta verticale di filo d'ottone in groſſezza eguale a quella del tubo, e lunga quattro pollici, la quale punta mira direttamente l'oppoſta ſecondo l' aſſe del tubo. Il filo del pendolino non è più attaccato all' armatura, ma al fondo della punta, ſicchè pende verticale diſcoſto circa due linee dall' armatura ſteſſa. E ripiglio nel rimanente colla ſteſſa preparazione, e attività della macchina, che uſai nella precedente ſerie, la ſeguente

SERIE 6.

1. Dal contatto delle due punte fino alla diſtanza d' un pollice s' impreſſe con quindeci giri nel quadro ſempre uguale forza di carica, che ſi eſtinſe con quattordeci ſcariche della conſueta boccetta.

2. Ai due pollici finì in tredeci; ai quattro in dieci; agli otto in otto; ai quattordeci in tre; ai diciotto in due ſcariche della boccetta. Ai ventiquattro pollici è ancor ſenſibile tra il pollice, e l'indice la ſcarica del quadro; ma nulla imprime nella boccetta. Ai pollici trenta d' ordinario più niun ſenſo di ſcarica nel quadro, e ſoltanto alcuna volta qualche cenno di puntura, e di luce.

3. Qui pure i moti hanno particolare eſpreſſione pel contraſto colla ſerie precedente. Dal contatto delle punte fino alle ultime diſtanze, nelle quali ſono ſenſibili que' moti, ſuccedono eſſi blandamente, e progrediſcono con uniformità di accidenti ſenza veruna oſcillazione, o agitazione impetuoſa. Al primo girar del diſco ſi ſcoſta alquanto il pendoletto, indi ſi accoſta all'armatura ſenza che però il filo reſti notabilmente gonfio in fuori finchè continuano i giri; col finir dei quali continua a reſtar aderente, nè ſi ſtacca, nè ſi vibra alquanto in fuori ſe non nell' atto, che ſi fa per cavar la ſcarica dal quadro. Queſti moti non ſono più affatto ſenſibili al di là dei quaranta due pollici fra le due punte.

4. Quando però nel contatto delle medeſime, e nelle minori loro diſtanze s' imprime ancor notabile carica nel qua-

dro, precedono nel pendoletto le ſteſſe vicende, ma in fine ſi ſtacca da sè nell' atto che continuano i giri del diſco, e ſi conſerva vibrato anche finiti i giri, finchè dura tal forza di carica, che ſi eſtingue con tre, o quattro ſcariche della boccetta. Talvolta però reſta aderente anche finiti i giri, benchè nel quadro vi ſia maggior forza di carica; e in tal caſo ſi vibra in fuori alla prima ſcarica, che la frappoſta boccetta cava dal quadro, e ſi mantiene vibrato in fuori perſino alle tre, o quattro ultime, ſiccome poco fa notai.

5. Provai qui ſimilmente a toccare di continuo col pollice, ed indice le oppoſte armature del quadro nell' atto, che continuano i giri del diſco, come feci nella ſerie quinta al n. 5. Ma non comparve così verun moto nel pendoletto, ſiccome neppur un cenno di elettricità ſi raccolſe nel quadro.

Quella divergenza adunque del pendolo, che chiamai di attrazione, e che ſuſſiſte colà tanto notabile in ſimil caſo ſenza la punta, reſta qui tolta affatto per la ſola addizione della punta.

6. Siccome pure per queſta ſola addizione ſvanì nell' atto dei giri ogni adeſione, e combaciamento del filo coll' armatura, benchè aſſai forte s' imprimeſſe nel quadro la carica; nè reſtò ſe non fino a certo limite la blanda adeſione del ſolo globetto coll' armatura.

7. All' oppoſto quella divergenza, che da forza della carica impreſſa nel quadro dipende, e che chiamai di *ripulſione*, comincia qui d' ordinario, e ſuſſiſte dentro i limiti dell' iſolamento, e nelle minori diſtanze in proporzione, che creſce la carica anche nell' atto, che continuano i giri, ſiccome notai al numero quarto.

8. Rimane da cercarſi, ſe queſta divergenza di ripulſione naſca realmente da ſola forza eſpanſiva della carica impreſſa, e permanente nel quadro. Dalla precedente ſerie già è manifeſto il contrario, mentre finchè ivi continuano i giri del diſco, e vie più ſi accumula piena forza ſcuotente nel quadro dal contatto fino oltre la diſtanza di quattro pollici, ben lungi dal comparire ſimile ripulſione reſtano il filo, e il globo combaciati, e compreſſi ſull' armatura iſteſſa (*Ser.* 5. *n.* 3. 8.). Finiti poi i giri ſi vibra ivi in fuori il pendolo in proporzione della carica, come qui ſi vibra nella ſteſſa proporzione molto prima, che finiſcano i giri.

9. Per accertarmi dunque vie più, che sì fatta ripulsione non dipende altrimenti da veruna forza espansiva della carica impressa nel quadro, osservo, che continua fin verso le tre, o quattro ultime scosse, che restano ancor da cavarsi dal quadro, e perciò con tale residuo di carica più non rimane sensibile quella ripulsione. Osservo di più, che anche nella piena forza della carica siffatta ripulsione dipende dalla comunicazione, che per mezzo dei due fili di ottone ritiene col suolo l' opposta faccia del quadro. Poichè ritirando que' fili, e rendendo così isolate ugualmente ambedue le facce armate del quadro, basta che si tocchi la faccia, da cui sembra ripulso quel pendolo, perchè esso cada inerte senza veruna vibrazione; e per eccitar nuovamente, e accrescere assai più, che non era da principio tale vibrazione, basta che si tocchi l' opposta armatura.

Onde non dipende da veruna forza espansiva propria dell' intera carica, nè di verun residuo di carica; ma da certa corrispondenza di azione dell' opposta faccia del quadro.

10. Con questo quadro così isolato provo in oltre, che quando il pendolo è vibrato in fuori, siccome decade accostando il dito all' armatura, e cade poi affatto pel contatto della stessa, così quando è vibrato in fuori, se in vece di accostare il dito all' armatura, l' accosto al globetto del filo, io lo inalzo, o lo vibro di più, e lo guido, e lo dirigo in qualunque parte, verso la quale lo invito con presentare il dito. Onde siccome nel precedente numero si mostrò sussistere l' intera carica, e qualunque suo residuo senza veruna forza espansiva esterna efficiente di quella ripulsione; così dalla presente osservazione risulta, che nasce da vera azione mutua di attrazione fra il dito, e il pendolo quella esterior vibrazione, e perciò meglio si riduce ad un cambio di relazione, ossia ad attrazione con qualche esterna materia, che non a meccanica forza espansiva del corpo, a cui appartiene.

E ciò s' intende non solo dalle facce dei quadri carichi, ma similmente si applica a tutti i moti, che si dicono di elettrica *ripulsione*.

11. E per l' opposta ragione apparisce, perchè colla punta al quadro si estenda appena ai quaranta due pollici (sopra *n.* 3.) un cenno di que' moti, che senza punta arrivano assai

notabili ſino ai cinquanta (*Ser.* 5. *n.* 10.). Poichè ſiccome ſenza punta al quadro la mutua azione colla punta del tubo ſi fa principalmente per via del pendolo, che ſporge innanzi all' armatura; così la punta ſpinta aſſai più innanzi, che non è il pendolo, raccoglie in ſe ſteſſa, o porta previamente nel quadro quella mutua azione, che più non può eſtenderſi nè al globetto, nè al filo.

12. Per rendere ſuperiore ad ogni ſcrupolo la preſente induzione, replicai col quadro da ambe le parti iſolato, e ſenza punta le ſperienze ora deſcritte nei numeri 9, e 10, nè vi fu altra differenza, ſe non che ſenza punta ſuccedono que' moti più continui, e veementi. Onde la punta non fa che dividere, o raccogliere in sè la mutua azione eſteriore, che ſi fa per la ſola via del filo, e del globetto nel quadro ſenza punta.

PREPARAZIONE.

Ritenendo la ſteſſa della precedente ſerie non altro cangio, ſe non la punta di quattro pollici, alla quale altra ne ſoſtituiſco in tutto ſimilmente poſta, e ſimile, fuorchè nella lunghezza, la quale è qui di pollici dodeci.

SERIE 7.

1. Nel contatto s' imprime carica, che ſi eſtingue in tredeci della boccetta.

2. Ad un pollice ſi eſtingue in dodeci; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in ſette; ai quattordici in tre; ai diciotto in una ſcarica della boccetta. Ai ventiquattro ancor carica ſenſibile nel ſolo quadro; e fino ai trenta talvolta è ſenſibile la luce, e puntura tentando di cavar la ſcarica.

3. I moti di adeſione del pendoletto finiſcono qui ai pollici trentaſei; e fino ai quaranta durò qualche accoſtamento; poichè vi fu ſcoſtamento nel toccare finiti i giri le oppoſte facce del quadro.

PREPARAZIONE.

A questa punta d' un piede altra ne sostituisco d' ottone simile, del doppio più lunga, cioè di pollici ventiquattro; e con quindeci giri ad ogni atto rinnovo altra serie, come la precedente.

SERIE 8.

1. A contatto non è più la carica, se non capace di sussistere fino alle dodeci scariche della boccetta.

2. Ad un pollice finisce in undeci; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in sei; ai quattordeci in tre; ai diciotto in due; ai ventiquattro nel solo quadro; ai trenta vi fu ancor luce pungente toccando le opposte armature del quadro.

3. I moti non si estesero più oltre dei pollici trentasei.

PREPARAZIONE.

Volendo in fine meglio discernere gli effetti di mutua azione delle sole punte senza verun sospetto di azione diretta della punta del tubo colla opposta armatura del quadro; e volendo vie meglio determinare fino a quanto si estenda la diretta azione della prima punta, che dal tubo procede nell' opposta punta, che parte dall' armatura, frapposi una lamina di vetro più grande del quadro ben pulita, e senza veruna armatura, distante otto pollici dal quadro stesso, sopra la quale piegai la punta lunga due piedi, e presentai questa al solito a quella prima nelle seguenti distanze.

SERIE 9.

1. Nel contatto con quindici giri di fortissima elettricità non oltrepassò mai le undeci scariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in dieci; ai due in nove; ai quattro in otto; agli otto in sei; ai quattordeci in tre; ai diciotto più nulla s' imprime nella boccetta, e nel solo quadro

è sensibile la scossa. Ai ventiquattro appena è sensibile la scintilla toccando immediatamente le opposte armature: ai ventisei non vi è più il minimo indizio di luce.

3. I moti non si discernono più in là dei pollici ventiquattro, e sono di tenuissimo scostamento, e accostamento; e progrediscono nelle minori distanze que' moti assai tenui. Ai pollici otto continua il globo a star aderente, nè si scosta, se non cavata la prima scarica della boccetta con divergenza d'arco d'un pollice. Ai pollici quattro si scosta in fine da sè, quando è assai forte la carica impressa. Ma tanto qui, come nelle minori distanze la sua divergenza non è più sensibile, quando più non restano nel quadro, che tre scariche della boccetta. Siccome in tutte le serie precedenti non comincia mai nell'atto dei giri, nè col finir di essi tal divergenza, quando la carica impressa non è capace di dar almeno quattro scariche della consueta boccetta.

OSSERVAZIONE 6.

Dopo le prime due, e le due seguenti serie di sperienze calcolai nella prima Parte i fenomeni delle elettriche punte in ciascuna specie di elettricità secondo le semplici ragioni diretta delle distanze, e inversa degl' isolamenti; e con quelle proporzioni calcolai similmente ne' primi otto teoremi i fenomeni delle punte medesime nelle opposte specie di elettricità. Se in quelle semplici ragioni d' isolamento, e distanze si terminassero le differenze di ogni elettrica azione, proseguirei ora a calcolar similmente le cinque ultime serie. Ma ben altre vie di calcolo forza è d' intraprendere e per determinare precisamente gli elementi delle punte, e per internarci così nella cognizione delle elettriche potenze. Poichè quanto quelle ragioni sono distinte, e certe in riguardo a que' particolari fenomeni, tanto sono limitate, e ipotetiche per l' applicazione loro alla generale teoria. Onde non altro io ne derivai ne' teoremi della prima Parte, se non i principali elementi delle punte, e ne riservai le teoriche applicazioni dopo le ultime ricerche da farsi nella seconda, e terza Parte.

Ora per entrare ordinatamente in simili ricerche aggiungerò alle precedenti serie di resinosa elettricità alcune osservazioni,

zioni, che le ragioni comprendono di tutti gli elementi, che concorrono a compiere l'azione delle punte nella ſteſſa ſpecie di elettricità; nè punto ci occuperemo a calcolarne alcuno ſingolarmente.

Due cauſe mi muovono a proceder in ſimil guiſa. Primieramente le compoſte ragioni, che nelle preſenti oſſervazioni raccolgo, mi porgono più adequato, e ſpedito confronto con le corriſpondenti ragioni, che dedurrò dalle cinque ſerie ſeguenti di vitrea elettricità; e tutte queſte inſieme poſſono poi ſimilmente confrontarſi colle ragioni, che dedurrò nel capo ſeguente dalle ſerie di ſuperficie oppoſte a ſuperficie non meno nella reſinoſa, che nella vitrea.

L'altra cauſa poi, che mi determina a raccogliere così quelle compoſte ragioni, ha principalmente per oggetto di ben diſtinguere i termini, e le differenze tutte, che in qualſivoglia modo concorrono a comporre le ſteſſe ragioni; eſſendo che unitamente con queſta diſtinta cognizione, e non altrimenti ci è lecito di calcolare que' termini, e quelle differenze ciaſcuna per ſe ſteſſa ſecondo le diſtinte ſerie di ſperienze, che ſingolarmente ſaranno fatte, o propoſte da farſi. Onde ne riſulteranno gli ultimi teoremi, che all' analiſi delle punte daranno compimento.

Coroll. 1. Nella ſteſſa ſpezie di reſinoſa elettricità la punta procedente dal tubo imprime nell' oppoſto quadro maggior forza di carica, e ne eſtende nello ſteſſo gli elettrici ſegni a maggiori diſtanze, quando è fornito d'armatura piana, e ſenza punta, che quando dall'armatura ſteſſa parte un'altra punta oppoſta alla prima.

Coroll. 2. E ſimilmente la carica, e gli altri elettrici ſegni eſteſi nel quadro dalla ſteſſa punta di reſinoſa elettricità ſi fanno minori, quanto più creſce la lunghezza della punta procedente dall' armatura, e oppoſta alla prima del tubo.

Coroll. 3. E in fine la carica, e gli elettrici ſegni impreſſi nel quadro dalla ſteſſa punta di reſinoſa elettricità ſi fanno ancor minori, ſe s' impediſce ogni mutua azione fra la punta del tubo, e l' oppoſta armatura del quadro, benchè intera ſuſſiſta l' azione delle due oppoſte punte fra loro.

OSSERVAZIONE. 7.

Per immediata osservazione delle ultime precedenti serie risulta

1. Che la punta procedente dal condottore di resinosa elettricità non fa veruno scoppio di scintilla contro l' opposta armatura, e contro l'opposta punta oltre la distanza di tre linee; indi nelle maggiori distanze fino ai pollici 24 segue ad indurre nel quadro la carica senz' altro strepito di scintilla.

2. Che se a fianco del tubo si presenti una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice, resta per tal modo scemata l'elettricità del tubo anche a distanza d'un pollice, e mezzo; ma non perciò scoppia veruna scintilla tra il tubo, e il globo presentato neppure alla distanza di due linee.

3. E soltanto quando la punta opposta, e il quadro sono lontani dalla punta del tubo più d'un piede, scoppia la scintilla fra il tubo, e il globo presentato alla distanza di tre in quattro linee.

OSSERVAZIONE 8.

Or quali sono le differenze, e i modi, che maggiore, o minore ci rendono la carica impressa, e gli altri elettrici segni? Poichè in fine in quelle differenze, e in que' modi s'involge la composta ragione, che stiamo rintracciando. Tentiamo prima d' ogni altra indagine di riconoscere ad una ad una partitamente quelle differenze e que' modi.

E quanto alla elettricità in se stessa soggiace a tre principali differenze.

1. Sotto la stessa quantità può variare la specie, e la qualità, che dicemmo ne' precedenti teoremi *forza specifica*.

2. In ciascuna specie è varia in oltre la *quantità*, che ad ogni giro del disco si eccita.

3. E posta anche la stessa quantità, e la specifica forza può variare secondo la *grandezza*, e *la figura* del condottore, in cui si raccoglie, e da cui all' opposto quadro procede.

E queste tre differenze di *specifica forza*, di *quantità*, e di

grandezza, *e figura del condottore*, ſiccome tutte riguardano l' interiore ſtato della elettrica azione, che indi paſſa nel mezzo ambiente, e nell' oppoſto quadro, le comprenderò inſieme col comune nome di *interne differenze*.

Alle interne ſuccedono le altre, che dal mezzo ambiente dipendono, il quale per eſſere ſrappoſto tra il condottore, e il quadro ci dà luogo di eſprimerle tutte col nome ſolo di *frappoſte*, *o ambienti differenze*. E proſeguendo a numerarle dopo le prime appartengono qui, 4. la ſpecie, e l' eſtenſione dell' iſolamento, oſſia de' corpi, che il condottore ſoſtengono, e circondano; 5. le qualità dell' aria, o di altro corpo ambiente, ſpettante all' iſolamento; e tali qualità particolarmente ſi riducono a denſità, o rarità; 6. a calore, o freddo; 7. umidità, o ſiccità; 8. purità, o miſtura di arie o particelle diverſe; 9. alla groſſezza ſteſſa dello ſtrato frappoſto tra l' eſtremità del condottore, e l' eſtremità della ſuperficie, o di altro, che dalla ſuperficie proceda dell' oppoſto quadro, la quale groſſezza ſi eſprime colle diſtanze, che in ogni atto di ciaſcuna ſerie vengano ſegnate.

Sono adunque ſei le *differenze frappoſte*, come tre da principio ſi notarono le interne.

Rimangono le differenze ſpettanti all' oppoſto quadro, che perciò ſi diranno *oppoſte*. Quando non vi è quadro dipendono le oppoſte differenze dai condottori, che naturalmente s' incontrano negli eſteriori limiti del mezzo ambiente, ed i medeſimi uniſcono l' azione loro con quella del quadro, quando queſto ſi rimuove oltre i limiti dell' iſolamento. E per numerar queſte inſieme alle precedenti, ſarà 10. la figura varia dell' oppoſta armatura, cioè o piana come nella ſerie quinta; 11. o fornita di punte di varia lunghezza, come nelle ſerie ſeſta, ſettima, ottava, e nona; 12. in oltre ſotto la ſteſſa figura può variarſi la grandezza, o eſtenſione della ſuperficie del vetro armata, come nella ſerie, che in ſecondo luogo accennai nelle oſſervazioni prima, e ſeconda; 13. e può in fine ridurſi a nulla l' armatura, e reſtar nuda la ſaccia del quadro; 14. e ritenendo queſta faccia armata può l' eſteriore, e inverſa faccia del quadro ſteſſo eſſere armata egualmente; 15. ovvero inegualmente più, o meno; 16. ovvero ridurſi l' eſteriore ſola affatto nuda, e ſenza veruna armatura; 17. e poi ritenendo egual-

mente armate le due facce del quadro, ora si toglie l' isolamento delle due armature fra loro, siccome abbiamo fatto nelle serie quinta, e sesta al n. quinto; 18. ora si toglie l' isolamento dell' armatura sola, che guarda il condottore, e si fa comunicare col suolo; 19. ora similmente si toglie il solo isolamento esteriore dal suolo con applicare all' esteriore armatura due fili metallici, come ho fatto in tutte le serie precedenti; 20. ed ora si rende anche la stessa armatura isolata ritirando que' fili; 21. Restando in fine uniformi tutte le precedenti differenze, si presentano le altre, che insieme alla duodecima indicate abbiamo nella osservazione seconda, e sono la diversa grossezza del vetro; 22. o le diverse paste, o dosi del vetro stesso; 23. e le altre sostanze dal vetro diverse, che atte sono a formar lamine resistenti, o quadri armati secondo le loro varietà. 24. ed esaurite infine, e rese pari tutte queste opposte differenze, che hanno luogo nella stessa, come nelle diverse specie di elettricità, rimane l' ultima differenza, che ne' precedenti teoremi indicai col nome di specifica mobilità.

Separando queste dalle tre prime interne, e dalle sei frapposte, quindeci rimangono le *opposte* differenze.

Ma la prima delle interne, che è la *specifica forza*, e l' ultima di queste, che è la *specifica mobilità*, non hanno luogo nella stessa specie, e costituiscono perciò le specifiche differenze della resinosa, e della vitrea elettricità. Prima dunque di ridurre a calcolo distinto le differenze delle cinque precedenti serie seguiterò ordinatamente le corrispondenti di vitrea, che le combinazioni esauriscono di punte opposte; e ripiglierò nel capo secondo le combinazioni di superficie opposte a superficie nell' una, e nell' altra specie di elettricità, dopo le quali tenterò di stabilire le vie, e i termini per calcolare tutte insieme le interne frapposte, e opposte differenze, che comuni sono alle due specie, acciò possano libere, e spogliate da simili differenze riconoscersi la specifica forza, e la specifica mobilità della resinosa, e della vitrea. Onde concluderò queste prime serie di resinosa col seguente

Lemma Primo.

D' uopo è calcolare distintamente le differenze tutte, che ridotte abbiamo ad interne, frapposte, ed opposte nella stessa specie di elettricità, e dedurne con particolari serie l'esatta misura per farci strada a calcolare in fine per se stessa la specifica forza, e la mobilità delle opposte elettricità, e stabilire così non equivoci principj della nuova Teoria.

CON VITREA ELETTRICITA'.

Preparazione.

Rinnovo la preparazione della serie quinta, e comincio a replicare con vitrea elettricità quelle cinque consecutive serie già fatte colla resinosa. Non vi è altra differenza, se non che nella resinosa ridussi tutte le serie a quantità di elettricità eccitata pressochè uguale, ed uniforme con uguale numero di giri. In queste di vitrea ritengo dal principio al fine di ciascuna serie l' uguaglianza, ed uniformità di eccitamento, e del numero dei giri; nelle serie poi consecutive cangio dall' una all' altra la quantità di eccitamento, e non serbo per comune misura, se non il numero dei giri, che sono quindeci in ciascun atto. Con ciò non restano più interamente comparabili le serie fra loro per difetto di uniformità della prima misura, che alla quantità corrisponde in ciascun giro eccitata; sono però tuttavia comparabili per l' altra misura, e per le proporzioni corrispondenti alla varietà della prima misura, ossia alla varia quantità di eccitamento.

SERIE 10.

1. A contatto finì la carica in tredeci scariche della consueta boccetta.

2. Ad un pollice finì alle undeci; ai due alle nove; ai quattro alle sei; agli otto alle tre; ai quattordici ad una; ai diciotto non imprime più il quadro veruna carica nella boccetta, e soltanto rende per sè una scossa ancor sensibile.

Ai ventiquattro pollici dà il quadro appena un cenno di ſcintilla pungente; ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti progrediſcono qui come nella ſerie quinta. Se non che lo ſcoſtamento del pendolo dall' armatura comincia più preſto, cioè a minori diſtanze, e finiſce poi alquanto più tardi, cioè ſi rende più notabile alle maggiori diſtanze.

PREPARAZIONE.

La ſteſſa della ſerie ſteſſa.

SERIE 11.

1. A contatto finiſce la carica in tredeci.

2. Ad un pollice arriva alle undeci; ai due alle dieci; ai quattro alle otto; agli otto alle quattro; ai quattordeci ad una. Ai diciotto non ha, che il primo grado di carica, nè imprime neppur un cenno nella boccetta. Ai ventiquattro il primo cenno di ſcintilla pungente nel quadro. Ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti qui pure procedono come nella ſerie ſeſta; ſe non che qui finiſcono più preſto, che nella corriſpondente reſinoſa; cioè alla diſtanza di trentaſei pollici non vi è che talvolta un ſoſpetto di accoſtamento, e comincia per oppoſto la divergenza anche più preſto, che nelle corriſpondenti di reſinoſa; cioè ſi ſcoſta il pendolo in proporzione, che creſce la carica nell' atto, che continuano i giri del diſco anche nelle minori diſtanze.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie ſettima.

SERIE 12.

1. E' tanto minore l' eccitamento di elettricità, che a contatto delle punte con quindeci giri non imprime nel quadro ſe non tanta carica, che finiſce in otto ſcariche della conſueta boccetta.

2. Ad un pollice finiſce in quattro ; ai quattro in due; agli otto in una. Ai quattordici l' ultimo grado di ſcuotente nel quadro, che non è capace d' imprimere verun cenno nella boccetta. Ai pollici ſedeci appariſce nel quadro l' ultimo cenno di luce.

3. Si ſcoſta qui pure il pendolo dopo i primi giri in proporzione, che creſce la carica fino ai pollici quattro, oltre i quali non vi è più verun moto, ſiccome non vi è più forza di carica maggiore di due ſcariche della boccetta.

OSSERVAZIONE. 9.

Preſcelgo in queſta ſerie la minor copia di elettricità eccitata per la regolarità della ſua progreſſione di carica impreſſa perſino ai limiti dell' iſolamento. La coſtante oſſervazione mi dimoſtra, che ogni modo di preparazione contempera i ſuoi effetti con certa grandezza di elettricità, la quale creſciuta, o ſcemata turba, e confonde egualmente la regolarità de' varj termini, che alle ſucceſſive diſtanze corriſpondono. Onde queſta copia di elettricità eccitata ſembra la più conveniente alla regolare ſucceſſione de' ſuoi termini in queſta preparazione.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie ottava.

SERIE 13.

1. Contrappongo al precedente aſſai tenue un viviſſimo eccitamento di elettricità, che fa eſploſione ſpontanea della conſueta boccetta ai dodeci giri; e con quindeci giri conſueti imprime col contatto delle punte tanta forza di carica nel quadro, che non ſi eſtingue ſe non con quindeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in undeci; ai due in nove; ai quattro in otto ; agli otto in ſei ; ai quattordeci in quattro ; ai diciotto in due ; ai ventiquattro in una ; e perſino ai trenta fu ancor l' ultimo grado di ſcoſſa nel quadro.

3. I moti tanto in queſta, come nella ſeguente ſerie cominciano ai primi giri in proporzione, che creſce la carica; e continuano, finchè dura tanta forza nel quadro, che ſia capace d' indurre in circa due ſcariche nella boccetta (*vedi Ser.* 12. *n.* 3.). Ma oltre la diſtanza di ventiquattro pollici in queſta ſerie, e oltre i diciotto nella ſeguente non vi è più verun indizio neppur di accoſtamento.

PREPARAZIONE.

La medeſima della ſerie nona.

SERIE 14.

1. A contatto finì in quattordeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice in nove; ai due in otto; ai quattro in ſette; agli otto in ſei; ai quattordeci in due; ai diciotto in una. Ai ventiquattro è ancora ſcuotente nel ſolo quadro; e fino ai trenta ſi manifeſta nello ſteſſo la ſcintilla pungente.

OSSERVAZIONE 10.

Dedurrò qui pure a norma della oſſervazione 6 alcuni corollarj.

COROLL. 1. Nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità la punta procedente dal condottore imprime a pari diſtanze nell' oppoſto quadro alquanto minore forza di carica, quando l' oppoſta armatura è piana, e ſenza punta, che quando dall' armatura ſteſſa parte una punta oppoſta alla prima.

COROLL. 2. Nè la carica impreſſa ſi fa notabilmente minore, quantunque creſca la lunghezza di quella oppoſta punta.

COROLL. 3. E comunque in fine ſi frapponga fra la prima punta, e l' oppoſta armatura del quadro un vetro nudo, che impediſce ogni loro mutua azione, purchè al ſolito ſuſſiſta l' azione delle due punte fra loro, ſi rende a pari diſtanze di poco minore la carica impreſſa nel quadro.

OSSERVAZIONE

OSSERVAZIONE 11.

Per immediata osservazione dalle cinque ultime serie precedenti risulta

1. Che la punta procedente dal tubo fa quasi continuo scoppio di scintilla contro l' armatura, o punta opposta fino oltre la distanza di nove linee; indi segue ad imprimere la carica senza altro strepito di scintilla.

2. Che se a fianco del tubo si presenti una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice, non diminuisce questo notabilmente l' elettricità del tubo, finchè non si sente fra loro qualche stridore di scintilla.

3. E questa scoppia viva tra il tubo, e il globo presentato fino alla distanza d' un pollice, quando il quadro, o la punta dallo stesso procedente sono lontani dalla punta del tubo anche meno d' un piede.

OSSERVAZIONE 12.

E donde procede, che in questi corollarj la carica si estende alquanto più notabile con punta, ed anche più lunga opposta alla prima, che non a pari distanze colla sola piana armatura del quadro? Mentre ne' corollarj dopo la sesta osservazione il contrario si notò colla resinosa elettricità. Gioverà qui trattenerci a rintracciarne la causa con qualche distinzione; e procederò in questa ricerca a norma della osservazione ottava considerando più distintamente quelle differenze interne, frapposte, ed opposte, che ivi soltanto accennai.

(*a*) Ed abbiamo occasione d' incominciare dalle opposte differenze riflettendo che la decima, e l' undecima appunto (che tra quelle sono le prime) esaurite furono nelle serie precedenti, e ci guidarono a quella varietà di corollarj, i quali la resinosa dalla vitrea elettricità sembrano per sè soli distinguere.

(*b*) E per le differenze di estensione delle armature, e d' isolamento delle medesime, le quali si comprendono dalla duodecima fino alla ventesima, troppo mi trasporterei fuori del titolo di questo capo, se per ciascuna volessi intraprenderne se-

rie diſtinte, e perciò ne accennerò ſoltanto alcuni termini principali; e quanto alla eſtenſione, o grandezza della ſuperſicie armata del vetro, che notai in duodecimo luogo, ci porgerebbe per sè ſteſſa argomento di molte ſerie, e di ſingolari induzioni. Poichè ſe la ſteſſa lamina con minore armatura a diſtanze maggiori riceve più notabile carica, la ſteſſa poi a minori diſtanze colla medeſima elettricità non ne riceve, nè può riceverne ſe non minore, che non ne riceverebbe, quando aveſſe armatura più eſteſa. Nè in ciò vi è uniformità alcuna di effetti, che ridur ſi poſſa a ragione coſtante, ma ciaſcuna determinata grandezza di armatura ci preſenta nell' ugualianza non meno, che nella varietà dell' altre differenze interne, frappoſte, ed oppoſte una diſtanza, o un limite, nel quale è maſſima ſecondo la capacità di quella grandezza la carica impreſſa; oltre il qual limite con minori diſtanze non creſce la carica altrimenti, ma o ſi rompe, o ſi ſcarica ſpontaneamente il quadro, e con diſtanze maggiori ſi fa ſempre minore la carica. E paragonando poi le diverſe grandezze d'armatura ſulla ſteſſa lamina colla quantità varia di elettricità in ciaſcun giro procedente dal tubo, vi è tale grandezza d'armatura, colla quale neppure a contatto con tenue elettricità non s'imprime cenno di carica.

(*c*) E nelle ſeguenti combinazioni fino alla decima ſeſta tutti i caſi, ne' quali manca l'armatura ſopra l' una, o l'altra, o ſopra ambedue le facce del quadro, rendono qualſivoglia elettricità procedente dal tubo inetta ad imprimere nel quadro ſteſſo la carica. Poichè queſta ſoltanto s'imprime con la conveniente elettricità, e diſtanza in ragione delle eguali armature, o in ragione della minore, quando ſono ineguali. E nella ſteſſa ragione delle armature può trarſi lo ſcoppio, o la ſcarica, quantunque il quadro ſia carico; qualora o l'una o l' altra, o ambedue le facce ſi ſpogliano di tutta l' armatura, o d' alcuna ſua parte.

(*d*) Nelle differenze poi notate dal numero diciaſſette fino al venti, che le combinazioni riguardano dell' iſolamento delle ſteſſe armature, non vi è, che la decima nona, in cui ſi raccolga, e reſti nel quadro impreſſa la forza di carica corriſpondente alla elettricità del tubo e alla grandezza, e alla diſtanza del quadro. Nelle altre niuna carica ſi raccoglie, nè

s' imprime in esso giammai, se non nel caso, in cui la stessa estremità del tubo si faccia successivamente ne' diversi punti disarmati servire di armatura.

(*e*) Nulla aggiungerò delle differenze comprese dal numero ventuno al ventitre, dopo che già osservai precedentemente, quanto esse pure influiscano nella varia capacità di ricevere la carica. Noterò bensì, che tanto in queste, come nelle precedenti differenze anche quando niuna s' imprime, nè resta la carica nel quadro, compariscono tuttavia al di là del quadro gli elettrici moti, e somiglianti segni di elettricità, dei quali ci occorrerà parlare tra poco (*i*).

(*f*) Anzi per fino nelle differenze frapposte, che dal numero quarto fino al nono si comprendono, similmente sussistono i movimenti, quando niuna più sussiste la carica, o la scarica, e ciò non solo nella varietà delle distanze, ma anche sotto la stessa distanza, e vicino al contatto. In vero se tra il condottore, e l' armatura del quadro si frappone una lamina resistente, come un vetro nudo, impedisce questo soltanto la carica, ma non i moti; e viceversa se una simile lamina si frappone tra le opposte armature di un quadro carico, s' impedisce per tal modo lo scoppio, o la scarica, ma non s' impediscono i moti. Il che parimenti accade colle differenze interne, che notate abbiamo al numero secondo, e terzo; poichè in molte serie di questo capo vedemmo sussistere i moti, ove più non sussisteva la carica, e lo stesso ci occorrerà d' osservare più volte.

(*g*) Nè la considerazione dei moti è perciò sostanzialmente diversa dalle cariche, o scariche. Poichè vedemmo già in alcuni casi più oltre estendersi i moti, che non la carica; ed ascendere questa al sommo, e sussistere negl' infimi gradi senza scostamento (*ser.* 5, *e* 9). Ed in altri casi all' opposto più oltre estendersi alcun segno di scintilla scuotente, che non i moti (*ser.* 6, *e* 11, *e seguenti*). E in somma le punte quanto per un verso scemano gl' intervalli, e la facilità, e prontezza dei moti, tanto crescono i limiti, e la facilità della carica. Onde gli accidenti dei moti soggiacciono a vicende non diverse dalle cariche, o scariche, poichè vi sono del pari nei moti certe combinazioni, e certi limiti per renderli più, o meno sensibili, e per fargli svanire in fine, o richiamarli.

(*h*) Come dopo i corollarj ſpettanti alla reſinoſa elettricità giovò della enumerazione delle differenze dedurne un lemma fondamentale per le ſeguenti inveſtigazioni ; così gioverà qui l' applicazione più diſtinta , che fatto abbiamo di quelle diſſerenze alle corriſpondenti ſerie di vitrea elettricità per guidarci ad un nuovo lemma, che più complete renda le ricerche dell' una, e dell' altra ſpecie , e ci ſomminiſtri in fine i veri termini pel confronto loro, e per la reciproca eſtimazione . Tre rifleſſioni aggiunte a quelle, che finora abbiamo eſpoſto, ci porranno in chiara luce il nuovo lemma, che ricerchiamo .

(*i*) E primieramente in tutti i capi delle propoſte differenze notar conviene quale , e in fino a quanto ciaſcuna influiſca in aumento, e quale poi ſi rivolti, e influiſca all' oppoſto in diminuzione di carica , o di moti, o di altro effetto ſenſibile , e ciò non ſolo per sè ſteſſe , e nella porzione di apparato, che a ciaſcuna immediatamente appartiene, ma anche intorno a sè, e nella porzione di apparato, che a ciaſcuna ſi riferiſce . Sembra talvolta ſvanire ogni eſterno ſegno e nel condottore, e nell' anneſſo apparato, come quando ſi preſenta un grande quadro, o una batteria da caricarſi; eppure le elettriche potenze agiſcono allora vicendevolmente più che mai, e in vece di ſvanire ſi raccolgono così nelle oppoſte facce del vetro.

All' oppoſto l' elettrica azione, che eſteriormente non appariſce, ſi eſterna, e ſi fa notabile ſtaccando, o allontanando l' armatura dallo ſtrato reſiſtente elettrico, a cui ſtava unita, come nell' epiniano elettroforo. Or queſta elettrica virtù non procede altrimenti dallo ſtrato reſiſtente, ma dall' armatura , ed è realmente di ſpecie a quella oppoſta, che nello ſtrato ſi raccoglie. Che ſe ſi eſternano poi in fuori dall' armatura, quando ſta unita al quadro, ſegni omologhi a quei della faccia reſiſtente, non ſono mai queſti per elettricità, che alla carica appartiene, ma ſono effetti di elettricità riſpinta, o frenata per azione della oppoſta armatura , i quali neceſſariamente o ſcemano la carica ſteſſa, o ne cominciano l' eſploſione. Ond' è, che ſimili effetti ſi chiamano ſecondo le diverſe relazioni or *laterali*, or *obliqui*, or *inverſi*; perchè ſebbene procedano da elettrica potenza , non ſono giammai prodotti dal primo ſtrato

attraverso del quale a vicenda si frenano, e si equilibrano le opposte specie, che constituiscono la carica. Simili potenze quanto più per l' interiore via dello strato resistente si esercitano vicine fra loro, tanto meno si esternano; e viceversa tanto meno ritengono di mutua azione, e di collisione reciproca quanto più si scostano, e si estendono esteriormente a fianco, o in opposto. Quindi nel descrivere, e valutare tale sorta di azioni troppo è facile prendere abbaglio, e cadere in contraddittorie illazioni.

(*k*) In oltre ciascuna delle anzidette differenze non ha d' ordinario andamento uniforme, nè preciso in sè stessa; ma soggiace a vicende, e inversioni di effetti, o perchè appunto è variabile, o perchè si compone, e si collide con altre. Per accennarne qualche esempio comincierò dalle interne differenze, nelle quali la punta accresce l' idraulico momento qualora si rivolge contra il corpo, in cui raccogliere si vuole tale azione, per quanto esso ne è capace. Ma se la punta stessa, o altre punte si rivolgono altrove, si trasforma l' idraulico momento in virtù dispersiva, e non concorre così che a scemare l' effetto della prima forza secondo la capacità, e vicinanza degli altri corpi, ai quali le punte si rivolgono.

Similmente le punte non meno coll' idraulico, che col meccanico loro momento spezzano il mezzo frapposto; e servono così or a scemare, or ad accrescere le consuete vie d' isolamento, e di accumulazione.

Il calore poi, che su tutte quelle differenze estende la sua influenza, fino a certo grado migliora la resistente virtù; più oltre poi la debilita, e la estingue affatto riducendo qualsivoglia resistente al comune officio di condottore. Il calore stesso accresce la siccità de' corpi, e dispone in oltre le elettriche sostanze a più facile scioglimento; ma nel tempo stesso dispone il vetro, la seta, e l' aria a concepire in seguito più pronta umidità, e inducendo varietà nel mezzo ambiente facilita per questa via la dispersione delle elettriche forze.

L' armatura in fine accresce e la capacità di accumulamento, e di mutua azione, ma colla sua stessa grandezza raresà l' elettricità movente; e perciò quando questa è tenue, diventa per la stessa grandezza dell' armatura inetta altrettanto a imprimer segni di carica, o di moti in quella maggiore capacità (vedi *oss.* 1. *e* 2).

Quindi nell' applicare ai particolari casi qualsivoglia fra le proposte differenze, d' uopo è determinarne l' andamento, e la collisione, e composizion sua con le altre, che nei casi stessi influiscono.

(*l*) Niuna per fine delle stesse differenze vi è, che non sia di ostacolo, e di resistenza alle elettriche potenze; o non soggiaccia ad ostacoli, e resistenze. Or chi non sa rarissimi essere i casi, ne' quali pienamente la potenza s' impiega contro la resistenza, talchè essendo quella incognita possa bene valutarsi colla sola cognizione dell' effetto suo sulla resistenza? Chi non sa l' effetto della potenza comunque accresciuta per la via delle macchine contro la resistenza non essere mai, se non l' eccesso dell' intero momento sopra i frapposti ostacoli? Che se quest' eccesso scemi, e perfine diventi negativo, allora l' effetto della potenza, e d' ogni suo momento rintracciare ne' frapposti ostacoli si debbe, e non più nella resistenza. Chi non sa quanto spesso i soli ostacoli superano le resistenze, e come poi quelli reagiscono del pari contro la potenza, e la resistenza? Nel qual caso se i momenti di varie potenze dall' effetto loro misurar ti piaccia contro le resistenze, cadrai in illusioni, e rovescj non meno nella qualità, che nelle proporzioni di quelle misure. E quante fiate non sostituirai l' ostacolo alla potenza, e tal parte di reazione dell' ostacolo non prenderai per misura della prima potenza? Che se ciò ad ogni tratto interviene nel valutare dagli effetti le potenze, che ci sono più familiari, e che sono in sè stesse trattabili, come sono le animate potenze, la gravità, l' acqua, l' aria, e altri fluidi: che sarà di quelle, che non operano se non per vie insensibili, e per accumulazione di particelle tenuissime inaccessibili all' attività de' sensi, e alla perfezione degli stromenti? Tali sono le azioni tutte di chimica affinità, che come ampiamente dominano in ciascun ramo della Fisica più delicata, così particolarmente reggono le elettriche potenze. Vi è di più tra le comuni azioni di affinità, e le elettriche il divario, che in quelle si riconoscono in fine, e si raccolgono d' ordinario i prodotti separati, e distinti; in questa i distinti prodotti non si rincontrano, se non a ondate, a soffj, e quasi a salti, nè altrimenti si raccolgono, se non nell' atto di mutua azione, ed in continuo sforzo per

collidersi a vicenda, e riunirsi. E questa singolare natura, o maniera delle elettriche potenze esige un nuovo genere d'investigazione, che è riservato per le particolari Memorie spettanti all' elettrica teoria.

Frattanto raccogliendo insieme le avvertenze sparse nella presente osservazione dedurremo il seguente

Lemma Secondo.

Qualunque sia la specifica forza delle elettriche potenze non può estimarsi, nè talvolta discernersi colle consuete vie del loro eccitamento, e confronto; molto meno può ridursi ad immediate misure di comuni stromenti, o ad effetti uniformi. Ma occorrono ne' diversi gradi loro tali modi, e momenti di aumento, e viceversa tali ostacoli di resistenze per diminuirne, e rovesciarne la vera loro grandezza, che se questi non sono in ogni caso riconosciuti, e distinti, confondono le assolute potenze coi momenti, e cambiano gli effetti delle potenze colle resistenze, nè ci lasciano veruna forma di esatto, e preciso calcolo della specifica loro ragione.

Osservazione 13.

A fronte delle moltiplici difficoltà, e combinazioni, che il calcolo ci ritardano e delle specifiche forze, e delle altre mentovate differenze, non v'ha però dubbio, che ciascuna di esse dalla seconda fino alla ventesima terza non sia in sè stessa certa, e determinata ne' suoi effetti, e nelle sue qualità. E perchè non dovrà la prima, e l' ultima di quelle ventiquattro differenze del pari sicuramente conoscersi nella sua esistenza, e ne' suoi effetti? Benchè non ci sia ancor permesso di calcolare l' una, e l'altra assolutamente per quelle vie, che non sono altrimenti accessibili, che dopo lunghe, e delicate preparazioni. Ne calcolai gli effetti dopo le prime quattro serie a norma di quelle preparazioni, e volli a bello studio esprimerle in numeriche proporzioni, e in fenomeni notissimi per colpire così più vivamente l'immaginazione, e scuotere con veemenza le comuni prevenzioni, e le triviali usanze di sperimentare. In vero nulla di assoluto esprimono quelle proporzioni,

e non altro sono in sè stesse, che il primo passo, ed una in somma delle molte speciali induzioni, colle quali a termine vuole condursi l' analisi delle punte. Proseguiamo dunque, come nella prima Parte, a raccogliere in teoremi le nuove induzioni, che dalle dieci ultime serie risultano.

TEOREMA XIV.

In ciascuna serie delle punte di resinosa elettricità la progressione della carica impressa nell' opposto quadro eccede in ciascun termine successivo la corrispondente progressione delle punte di vitrea.

E dovrà dunque il Fisico ridursi in fine ad implorar l' attenzione di chi legge, o ascolta, come è costume dell'Oratore? Tutta si richiede l' attenzione de' più penetranti ingegni a ben comprendere il senso, e le prove del presente teorema per la novità e per l' estensione de' termini, che insieme raccoglie, e confronta. M' ingegnerò di sollevarne, e sostenerne lo sforzo esprimendone colla maggiore chiarezza, e coll'ordine più distinto le idee.

1. Distinguo in ciascuna serie il primo termine dai successivi, che ne formano la progressione. Quel primo determina la quantità di elettricità, che costituisce la seconda differenza notata nell'osservazione S, quantità, che in ciascun giro si eccita, e in quindici giri si raccoglie, quando la punta, e l' armatura, o le due punte fra loro sono a contatto. E siccome si mantiene da quel primo fino all' ultimo termine d' ogni serie collo stesso numero di giri la stessa quantità, perciò quel primo termine serve di base, e fissa l' assoluto valore di ciascuna serie.

Ne' diversi apparati, e nelle diverse specie di elettricità non fu possibile di ridurre quel primo termine a ragione di eguaglianza in tutte le distinte serie, massime ascendendo queste a tanto numero. Sarebbe tale impresa superiore o alla umana condizione, o alla qualità stessa della materia, che a tante differenze, e a tanta incostanza soggiace, siccome abbiamo più volte osservato. Avrebbe in vero quella comune uguaglianza del primo termine somministrato più facile, e regolare il confronto e di tutti i primi nelle diverse elettricità, e de' successivi termini in ogni loro progressione.

A questo

A questo essenziale difetto di facilità, e di regolarità non vi è altro riparo, che soggettarsi a calcolo più composto, e rintracciarne le proporzioni secondo l' inevitabile varietà di ciascun termine primo. La semplicità del calcolo è vana qualunque volta alla natura delle cose non corrisponde; e il Fisico del pari, che il Matematico secondo l' indole, e la natura de' soggetti diversi è ad ogni passo forzato di variar metodi, e formole di calcolare. A questo fine ristringiamo in tavole tutti i numeri delle precedenti serie di resinosa, e di vitrea elettricità segnando nella prima linea orizzontale i nomi di ciascun termine dal contatto fino alle ultime distanze, e nelle seguenti linee sottoponendo a ciascuno di que' nomi il numero delle scariche, colle quali si esaurì la carica impressa nel quadro in ogni serie distinta.

CON RESINOSA ELETTRICITA'.

	A contatto.	Poll. I.	Poll. II.	Poll. IV.	Poll. VIII.	Poll. XIV.	Poll. XVIII.	Poll. XXIV.	Poll. XXX.	Poll. XXXVI.
Ser. 5 =	14	14	13	12	9	5	3	1	*X*	*x*
Ser. 6 =	14	14	13	10	8	3	2	*X*	*x*	o
Ser. 7 =	13	12	10	9	7	3	1	*X*	*x*	o
Ser. 8 =	12	11	10	9	6	3	1	*X*	*x*	o
Ser. 9 =	11	10	9	8	6	3	*X*	*X*	o	o
Totale	64	61	55	48	36	17	7	1		

2. Abbiamo espresso colla *X* majuscula l' ultimo grado di scossa, che si sente toccando immediatamente le opposte armature del quadro, quando non è più capace d' imprimere veruna forza scuotente nella boccetta; e colla *x* minore gli ultimi cenni di scintilla pungente, o di luce senza espresso senso di scossa.

Sommati abbiamo in oltre sotto ciascuna colonna i numeri pel confronto composto di tutte le serie insieme di resinosa, e di vitrea, siccome pel semplice confronto di ciascuna serie colla sua corrispondente dovremo riportarle alternamente da una tavola alla corrispondente dell' altra. Dei moti non occorre per ora farne uso, e perciò non ne estendiamo ulteriormente la tavola; e passiamo all' altra tavola corrispondente.

CON VITREA ELETTRICITA'.

	A contatto.	Poll. I.	Poll. II.	Poll. IV.	Poll. VIII.	Poll. XIV.	Poll. XVIII.	Poll. XXIV.	Poll. XXX.	Poll. XXXVI.
Ser. 10 =	13	10	9	6	3	1	X	x	x	o
Ser. 11 =	13	11	10	8	4	1	X	x	x	o
Ser. 12 =	8	4	2	1	X	x	o	o	o	o
Ser. 13 =	15	11	9	8	6	4	2	1	X	o
Ser. 14 =	14	9	8	7	6	2	1	X	x	o
Totale	63	45	38	30	19	8	3	1		

3. Un' occhiata ſu queſte tavole, e l'immediato confronto de' termini corriſpondenti in ciaſcuna ſerie compie la dimoſtrazione del Teorema propoſto. Ma per dirigere queſto colpo d'occhio non ſolo nelle ſomme totali, che ſono d'immediata evidenza, ma nelle corriſpondenti, riduciamo in quelle tavole alternamente a confronto i termini, che eſprimono eguale, o più proſſimo il numero delle ſcariche colle riſpettive diſtanze fino all' ultima ſcoſſa tratta dal quadro. Quando non vi è il numero eſatto nella ſerie corriſpondente prendiamo la diſtanza di mezzo fra i due termini più proſſimi.

Ser. 5. Dalle ſcariche 13 fino ad una ſono poll. . 22 . .
Ser. 10. Dalle 13 all' ultima . . . . . . poll. 14
Ser. 6. Dalle 13 all' ultima . . . . . . poll. . 19 . .
Ser. 11. Dalle 13 all' ultima . . . . . . poll. 14
Ser. 7. Dalle 8 all' ultima . . . . . . poll. . 12 . .
Ser. 12. Dalle 8 all' ultima . . . . . . poll. 4
Totale poll. 53 . . 32

Ed è qui tanto nelle maggiori diſtanze di ciaſcun termine, come nelle ſomme loro evidente la ſuperiorità della reſinoſa.

4. Ed è queſta del pari evidente, ſe ſi paragonino le ſomme totali corriſpondenti a ciaſcun termine in eguali diſtanze. Le ſomme dei primi termini ſono 64 : 63, e ſi ſuccedono le corriſpondenti come ſegue.

Resinosa	Distanze comuni	Vitrea
61 . . .	Poll. I . . .	45
55	II . . .	38
48	IV . . .	30
36	VIII . . .	19
17	XIV . . .	8
7	XVIII . . .	3
1	XXIV . . .	1
Totale 225 . . .	. . . .	144

5. Riducendo adunque a' fenomeni le ragioni di queste somme totali de' numeri corrispondenti alle uguali distanze abbiamo la seguente analogia. Se le somme de' termini primi siano in numeri prossimamente uguali cioè 64:63; le somme de' termini successivi corrispondenti ascendono alla numerica espressione di 225:144. Onde quantunque le forze costituenti i primi termini non abbiano differenza, che d' unità, le somme de' successivi termini nella resinosa eccedono quelle della vitrea, come il numero 225 eccede il numero 144, e per esprimere lo stesso con fenomeni di cariche, la resinosa eccede la vitrea quanto una carica espressa con 225 di quelle unità eccede altra carica espressa con 144.

6. Nè faccia nella precedente tavola eccezione l'apparente uguaglianza degli ultimi termini ai pollici XXIV. Poichè nella serie 5 non comincia il primo termine che con 14 scariche, e nella serie 13 il primo termine comincia con 15 scariche; e con tutto ciò non estende l' ultima scossa se non quanto quel termine primo della serie 5.

Nasce in oltre quella apparente uguaglianza degli ultimi termini da altra cagione, la quale ci obbligò a interrompere nel numero 3 precedente il confronto fra i termini corrispondenti delle due ultime serie 8, e 9 di resinosa colle ultime 13, e 14 di vitrea. S' interruppe adunque simile confronto, perchè quelle ultime serie non hanno termini comuni, nè possono come le precedenti ragguagliarsi, e ridursi a' termini prossimi. Il che acciò chiaramente s' intenda d' uopo è osservare tra le serie di resinosa, e di vitrea elettricità due singolari contrapposizioni, le quali se costanti sono nelle prime serie, con maggior espressione poi nelle due ultime si manifestano.

7. Primieramente è insigne la decadenza della vitrea sopra la resinosa dall' uno all' altro dei primi termini d' ogni serie. E per trattenermi soltanto nelle ultime la vitrea nella ser. 13 in un pollice dalle 15 decade alle 11; ed ai due pollici alle 9, e nella serie 14 dalle 14 decade in un pollice alle 9. Mentre la resinosa in un pollice nella ser. 8 dalle 12 non decade, che alle 11, ed arriva fino ai quattro pollici prima di cader alle 9, e nella serie 9 dalle 11 non decade che alle 10, ed arriva fino ai due pollici prima di cader alle 9.

All' opposto negli ultimi termini decade più insignemente la resinosa, che non la vitrea. E per ristringermi qui pure alle ultime serie, la resinosa nella serie 8 in quattro pollici decade dalle 3 ad 1, e nella serie 9 nello stesso termine dalle 3 a niuna. Mentre la vitrea nella serie 13 nello stesso termine decade gradatamente dalle 4 a 2; e nel seguente di sei pollici dalle 2 ad 1. E nella ser. 14 in quattro pollici non cade che dalle 2 ad 1.

Ma queste contrapposizioni meglio, e immediatamente si scorgono nelle somme corrispondenti dalla tavola del n. 4 precedente. In esse dal contatto ad un pollice la resinosa è $= 64:61$, e la vitrea $= 63:45$, così ne' seguenti fino ai pollici otto la resinosa decade pochissimo in confronto della vitrea. Indi comincia la decadenza a farsi presso poco eguale; poichè dagli otto ai quattordici pollici la resinosa è $= 36:17$, e la vitrea $= 19:8$. Ma dai pollici quattordeci ai diciotto quella è $= 17:7$, questa $= 8:3$, e in fine dai diciotto ai ventiquattro quella è $= 7:1$, questa $= 3:1$, cioè decade la resinosa insignemente più della vitrea.

E siccome queste differenze, e contrapposizioni comprendono in sè stesse importanti applicazioni per la teoria, perciò le ridurremo nella seguente tavola esprimendo in frazioni più prossime le successive differenze de' rispettivi termini col precedente

Resinosa		A contatto	Vitrea	
Differenze	64 . .	Primo termine	63	Differenze
$\frac{1}{11} = 3 =$	61 . .	Poll. I . . .	45	$= 18 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{10} = 6 =$	55	II . . .	38	$= 7 = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{1} = 7 =$	48	IV . . .	30	$= 8 = \frac{1}{5}$
$\frac{1}{4} = 12 =$	36	VIII . . .	19	$= 11 = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2} = 19 =$	17	XIV . . .	8	$= 11 = \frac{1}{2}$
$\frac{10}{17} = 10 =$	7	XVIII . . .	3	$= 5 = \frac{5}{1}$
$\frac{6}{7} = 6 =$	1	XXIV . . .	1	$= 2 = \frac{2}{3}$

8. E in proposito nostro l' ultima contrapposizione quanto accorcia le distanze degli ultimi termini della resinosa, tanto allunga le stesse nei corrispondenti della vitrea. Onde comparando nel num. 3 precedente colla ragione delle distanze la resinosa, e la vitrea elettricità nella maggior forza, che in quella comparisce per le sole distanze un' altra se ne include, che per ora non può calcolarsi. E perciò ragguagliando i termini ultimi della resinosa coi corrispondenti di vitrea prevediamo, che l' errore cospira ad accrescerne la superiorità più che non apparisce dalle semplici distanze. Al contrario se ragguagliassimo i termini primi della resinosa cogli ultimi della vitrea, cospirerebbero le semplici ragioni delle distanze a indurci doppiamente in errore, perchè la superiorità di que' primi verrebbe in tal modo a confondersi colla più lenta decadenza degli ultimi di vitrea.

Qualunque sia pertanto la cagione di simili contrapposizioni, che altrove si esplorerà, rimane e col confronto de' termini corrispondenti alterni, e colle somme totali de' medesimi, e colle somme de' termini simili compiuta la dimostrazione del teorema proposto.

9. Mal si apporrebbe però chi ne credesse compiuta egualmente l' intelligenza. Per giungere a questa d' uopo è riconoscere dal primo all' ultimo il valore di que' numeri, che ciascun termine esprimono delle due tavole. Nè si può senza manifesta petizione di principio assumere, che il numero 14,

o 13 del primo termine d' una ſerie di reſinoſa ſia eguale al num. 14, o 13 del primo termine della corriſpondente di vitrea, benchè ſi eſprimano con numeri eguali; il che ſimilmente s' intenda delle ſomme loro, e dei ſucceſſivi termini comunque con eguali numeri eſpreſſi in ogni loro progreſſione.

10. Suſſiſte ſoltanto con queſta eguaglianza de' numeri l' eguaglianza del loro valore ne' termini corriſpondenti della ſteſſa ſpecie di elettricità, ma ſotto ſiffatta eguaglianza ſi mantiene una diſuguaglianza grandiſſima di ciaſcuna unità componente que' numeri. Poichè per eſempio le dieci unità, che il ſecondo termine eſprimono della ſerie decima, non ſono altrimenti omogenee, come niuna lo è di quante altre eſprimono o i primi, o i ſucceſſivi termini di qualſivoglia ſerie. Anche a ſolo ſenſo manifeſtamente ſi riconoſce ſempre maggiore l' unità precedente, che non la ſeguente in tutta la ſucceſſione di ciaſcun numero.

11. Due ricerche adunque ſi preſentano da farſi per compiere l' intelligenza del teorema, e dei numeri, che lo dimoſtrano. Si debbono nella prima valutare le unità componenti i primi termini delle due ſpecie di elettricità; e ſi valuteranno nella ſeconda ricerca le unità, che i ſucceſſivi termini compongono in ciaſcuna di quelle ſerie. A queſti due oggetti ſoddisfaremo nel ſeguente

TEOREMA XV.

I numeri, che l' eccеſſo eſprimono della carica impreſſa nel quadro in tutta la progreſſione de' termini con punta di reſinoſa ſopra la punta di vitrea elettricità, non s' intendono, nè ſono comparabili altrimenti, che con nuove induzioni.

1. Or quale induzione ci guiderà a valutare quelle unità, ed a ridurle omogenee, e per tal via chiare, e comparabili? Non altro che una nuova applicazione, e il compimento di quella ſteſſa, che ci guidò a ritrovare que' numeri, ed a riſolverli in quelle unità. Riſolviamo adunque ciaſcuna unità nell' iſteſſo modo, che le cariche abbiamo diſtinte, le quali a ciaſcuna ſpecie, e a ciaſcun termine delle loro ſerie appartengono; ed avremo così que' numeri chiari, e diſtinti, e perciò comparabili fra loro, come lo ſono fra loro i termini di quelle cariche.

Quanto però ad immaginarsi piana, e facile sembra questa nuova induzione, tanto è intralciata, e ardua ne' dettagli, che ne compiono l' esecuzione. Ciascuna unità de' primi termini, e di tutti i successivi di tante serie vuol essere valutata distintamente; il che altro non significa in fine se non di risolverla in numeri formati di nuove unità omogenee, e comparabili. Nè ciò altrimenti si ottiene, che con suddividere la prima misura in parti minori finchè arriviamo ad eguali elementi primi, e nascenti, dai quali tutte quelle unità, e quelle cariche sono in sè stesse composte. Così in ogni genere di calcolo si riduce a minimi termini qualsivoglia varietà di numeri, pesi, o misure.

2. Ritorniamo pertanto al principio di questo capo, e ripigliamo l' operazione descritta nella preparazione della serie quinta. Con una boccetta applicata all' estremità dell' arco l' arte ivi insegnai di esprimere con numeri in tutte le future serie dal primo all' ultimo termine le cariche impresse nel quadro. Nelle tavole poi del precedente teorema chiamai *X* quell' ultimo grado di forza scuotente, che si trae immediatamente dal quadro stesso, quando più niuna ne imprime nella boccetta. Or se arriverò ad esprimere ogni unità di que' numeri con altri numeri composti dell' ultimo grado di forza scuotente nell' una, e nell' altra specie di elettricità, non ci approssimeremo per tal via quanto più è possibile a quella comune, e comparabile misura, che in tutti que' termini ricerchiamo?

3. Per tal uopo in ciascuna unità di que' numeri applico alla boccetta l' operazione stessa, che replico nel medesimo tempo, e similmente sul quadro procedendo nella seguente forma.

Ho pronte tre boccette simili, ed eguali alla prima, e due archi. Uno di questi archi colla prima boccetta insieme impugnata ad una estremità nella sinistra mano la tiene un compagno previamente agguerrito in simili sperienze, mentre io traggo al solito coll' altro arco la prima scarica del quadro nella seconda boccetta. Questa così caricata la passo immediatamente nella destra mano del compagno, il quale la impugna come la prima nell' altra estremità dell' arco; ed appressandone il globo a quella prima subito la scarica in essa. Subito abbassa il globo di questa contro l' arco sotto la destra mano,

e per tal via la ſcarica interamente. Indi ripete la ſteſſa operazione di prima, finchè la ſeconda boccetta non ſia ridotta all' ultimo grado di forza ſcuotente, e tien numerate le ſcoſſe, che ne cavò.

Frattanto io ſoſtituendo a quella ſeconda la terza boccetta nell' eſtremità del mio arco, numero ſimilmente le ſcariche, finchè ſi eſauriſca al ſolito la carica impreſſa nel quadro; ed ottengo così la prima ſuddiviſione di quelle unità componenti i numeri, nei quali ad ogni termine fu diviſa la carica impreſſa nel quadro.

4. Carico nuovamente il quadro in tutti i termini d'ogni ſpecie di elettricità, cominciando dalla carica diviſa in quindeci ſcariche della boccetta (per eſſere queſta la maggiore che occorſa ci ſia nelle ſerie medeſime a contatto, oſſia nel più alto loro termine), e numero in ciaſcun termine la corriſpondente ſuddiviſione colla prima, e ſeconda boccetta, come nella ſeguente tavola, che leggere ſi vuole dalla colonna di mezzo a dritta, e ſiniſtra.

Reſinoſa.	Termini del quadro.	Vitrea.
4	15	6
4	14	5
4	13	5
4	12	4
4	11	4
3	10	4
3	9	4
3	8	4
3	7	3
2	6	3
2	5	3
2	4	3
1	3	2
X	2	1
0	1	X
39		51

5. Comprendo in un colpo d'occhio nella preſente tavola i riſultati di trenta nuove ſerie di ſperienze, cioè quindici con reſinoſa, e altrettante con vitrea elettricità. La maggior

gior parte di esse sono state ripetute per fino a sei, e otto volte in tempi diversi, e niuna mai meno di tre volte; e secondo il complesso di tante ripetizioni ne ho ragguagliati i numeri, che a ciascun termine corrispondono. Nei tempi di aria ben secca ebbi numeri assai maggiori, ma presso a poco proporzionali ai precedenti. Ne' tempi più umidi occorrono maggiori irregolarità, massime nella resinosa, che scema, e si disperde con incredibile prontezza.

6. Ciò, che ho fatto colle tre boccette sul quadro, forza è ripeterlo nei nuovi numeri in ciascun termine delle due boccette. Ed a questo fine non altro ci vuole, che una quarta boccetta simile, ed eguale alle prime. Tosto che ho cavata colla seconda boccetta la prima scarica dal quadro, lo abbandono; e subito colla terza boccetta io cavo similmente da questa la prima scarica. Passo immediatamente quella terza alla destra mano del compagno, che non esaurisce al solito, come qui sopra, il numero delle scariche nella prima boccetta. Ed io frattanto sostituendo a quella terza la quarta boccetta esaurisco insieme, e similmente il numero delle scariche della seconda boccetta; ed ottengo per tal modo la nuova, ed ultima suddivisione di que' numeri, come nella seguente tavola.

Resinosa.	Termini della seconda boccetta.	Vitrea.
3	6	5
3	5	4
2	4	3
1	3	2
z	2	1
o	1	z
9		15

7. Ristringo similmente nella presente tavola i risultati di dodeci nuove serie di sperienze, cioè sei di resinosa, e sei di vitrea elettricità, ripetute, e ragguagliate secondo le avvertenze, che più sopra indicai (*n*. 5.)

8. Poteva bastare la prima tavola, se l' ultimo grado di forza scuotente X nel quadro fosse stato uguale all' ultimo grado di forza scuotente nella boccetta. Ciò per altro sarebbe stato un assunto arbitrario, e volli perciò ridurre le scariche stesse della boccetta all' ultimo grado loro, che chiamerò z.

Ed è così dichiarata, e ridotta in tavole la nuova induzione, che sola guidar ci può alla distinta comparazione, e intelligenza di que' numeri, che le proporzioni comprendono stabilite nel teorema precedente. Passiamo ora ad investigarne l' espressione col seguente

TEOREMA XVI.

Le tavole di nuova induzione esprimono distintamente il valore delle parti, ond'è composta ciascuna carica in tutti i termini delle precedenti serie di resinosa, e di vitrea elettricità.

1. In tutti i termini delle precedenti serie si ridusse la carica all'ultimo grado di forza scuotente X per via di scosse successivamente tratte dal quadro; le quali espressero in numero le parti stesse di ciascuna carica. Se eguali fossero le unità, che questi numeri compongono, sarebbe nella semplice ragione di essi il valore delle parti, onde ciascuna carica è composta.

Ma siccome da principio osservai (*teor. XIV. n. 9., e 10.*) sono quelle unità disuguali in due modi; l' uno de' quali riguarda la diversità della specie di elettricità, l'altro la diversa intensità d'ogni successiva scarica della boccetta, il che per fino col semplice senso è manifesto.

Per valutare adunque l' una e l' altra disuguaglianza, due nuove suddivisioni si richiedevano, una pel confronto delle diverse specie, e l' altra pel confronto di tutte le successive scariche tratte dal quadro in ciascun termine delle specie diverse di elettricità. Or quelle suddivisioni espresse sono distintamente nella prima tavola del teorema precedente (*n*. 4.); nella quale e le unità corrispondenti di specie diversa, e le successive di ciascuna specie ridotte sono in numeri minori, ossia parti di quelle prime unità.

2. Sommando adunque le serie di tali numeri minori, ovvero parti ne risultano le proporzioni di tutti i termini dell'una e dell'altra specie, e dei successivi termini di ciascuna fra loro.

3. Il metodo di valutar quelle cariche non è che di approssimazione per la via di risoluzione, o esaurimento delle medesime. E siccome in Fisica non è quanto in Matematica

agevole il replicare le ſuddiviſioni per approſſimarne ognora più l' eſpreſſione, e il valore; perciò ſoddisfare potrebbe all' intento noſtro la ſuddiviſione compreſa nella precedente tavola, trattandoſi maſſimamente di coſa tanto ardua in sè ſteſſa, e di vie tanto nuove, nelle quali non ſi era fin qui tentato, non che fatto un ſolo paſſo neppure nelle prime diviſioni raccolte nel teorema XIV.

Contuttociò volli ben più innanzi inoltrarmi per approſſimare quanto meglio poſſibil foſſe il valore di quelle proporzioni. Conſiderai le differenze fra le unità de' nuovi numeri, o delle parti minori; e con nuova ſuddiviſione le diſtinſi in altre di ordine ancor minore. Come quelle unità prime eſprimenti il numero delle ſcariche tratte dal quadro furono diviſe in altre minori tratte colla ſeconda boccetta; così furono queſte ſimilmente diviſe in altre ancor minori tratte dalla ſteſſa colla terza boccetta; e ſono queſte ordinatamente eſpreſſe nella ſeconda tavola del teorema precedente (*n. 6.*) in ambedue le ſpecie di elettricità.

4. Sommando adunque nuovamente la ſerie di queſti numeri, o parti minori, che ſuddividono le ſomme precedenti, riſulterà quanto più proſſimo ſperar ſi può il valore delle ricercate proporzioni.

Cadrebbe però in errore, chi ampliaſſe incautamente l' uſo di queſte tavole per eſtimare il valore di qualſivoglia carica, e voleſſe così troppo rapidamente generalizzare. Non ſono queſte che particolari induzioni, nè ſi eſtendono forſe più oltre delle preſenti preparazioni, e dei modi loro. Altre ricerche, e nuove induzioni a tal uopo ſi richiedono, delle quali alcuna ne accenneremo nel ſeguente

TEOREMA XVII.

Le proporzioni delle cariche valutate ſecondo le tavole precedenti non ſi eſtendono ad altri modi, nè generalizzare poſſono le ragioni d' ogni carica elettrica, ſe non col ſuſſidio di nuove, e moltiplicate induzioni.

Non ripeterò qui le varietà corriſpondenti alle differenze, che numerai nelle oſſervazioni previe ai due lemmi più ſopra ſtabiliti. Ci porterebbero quelle a tanta moltiplicità d' indu-

zioni, quanto opportune per la comprensione della teoria, altrettanto dai limiti del presente capo aliene. Può agevolmente a ciascuna di quelle differenze adattare le convenienti induzioni, chiunque voglia inoltrarsi in simili ricerche. Accennerò piuttosto alcuni modi da altri, ch' io sappia, non osservati nel variar le proporzioni delle cariche impresse.

1. Cercai primieramente, se, poste le altre cose pari, fossero le cariche proporzionali al semplice numero dei giri, coi quali esse s' imprimono. Non solo tale proporzione variò nelle diverse, ma anche in ciascuna specie di elettricità. Se per esempio con un giro s' impresse carica equivalente a due scariche di boccetta; con due giri fu quella maggiore di quattro, con tre maggiore di sei, con dieci assai maggiore di venti delle stesse cariche ridotte, e così in seguito. Non ho tant' oltre promossa l' induzione da fissarne fin qui veruna legge; posso però accertare, che cresce la carica in proporzione maggiore del semplice numero dei giri.

2. Cresce in oltre la carica secondo certa proporzione della celerità, colla quale si succedono que' giri medesimi.

3. Onde con elettricità, che minore sia in ciascun giro, s' imprime, e si estende fino a certe distanze la piena carica, purchè si accresca il numero, e la rapida successione dei giri. Il che non si ottiene con minor numero di giri, benchè fino a certo grado maggiore sia l' elettricità, e più rapida la successione loro.

4. E viceversa al di là di certe distanze tra il condottore e il quadro, per quanto cresca il numero, e la celere successione, e la quantità di eccitamento di ciascun giro, non s' imprime giammai piena, ed in fine poi a nulla si riduce la carica.

5. Siffatte distanze non sono fin qui ridotte a limiti certi in nissuna specie di elettricità, nè si è trovato con quale ragione que' limiti corrispondano o al numero, o alla celerità, o alla quantità di eccitamento de' successivi giri del disco.

I tre ultimi numeri risultano immediatamente dal confronto della serie prima colla quinta, e della terza colla decima, e dalle moltiplici combinazioni, che colle precedenti preparazioni in vano io cimentai per dedurne qualche lume di ragione costante.

6. Esporrò nel seguente capo altri modi, coi quali l'elettricità eccitata nel condottore si porta al sommo grado; e ciò nonpertanto la carica nell' opposto quadro non s' imprime in veruna costante proporzione, che corrisponda alla grandezza di eccitamento, o al solo numero, o alla rapidità dei giri, nè alla sola grandezza delle superficie terminanti il condottore, o l' opposta armatura, nè alle sole distanze.

7. Talchè ogni grado maggiore di eccitamento sembra esigere una determinata grandezza di superficie terminante non meno il condottore, che l'opposta armatura, acciò quel grado o si mantenga nel condottore, o si estenda ad imprimere maggior carica nell' opposto quadro. Onde senza conoscere l' intera serie, e successione in ciascun apparato, possono ne' particolari suoi termini confondersi quelle diverse ragioni di eccitamento, o di superficie, o di carica.

8. Sembra in oltre, che a ciascun grado maggiore di elettricità eccitata corrisponda certa capacità d' isolamento, o di resistenza del mezzo ambiente accresciuta per frenarla, e raccoglierla nel proprio condottore, o diminuita per disperderla, e derivarla altrove. Quindi occorrer debbono nelle serie, che si fanno con gradi varj di eccitamento, certe distanze, nelle quali apparisce massima l' elettricità del condottore, e minimo l' effetto suo nell' opposto quadro; e viceversa minima nel condottore, e massimo l' effetto suo nel quadro. E perciò se in ciascun grado non si esaurisce l'intera serie, e si giudichino que' gradi, e gli effetti loro con termini particolari, e solitarj, si confonderà un grado con l'altro, e si prenderanno al rovescio le misure della intensità, e degli effetti loro.

9. Qualunque volta adunque ci proponiamo di confrontare in parità di apparato la forza delle specie diverse, o ne' diversi apparati la forza di ciascuna, è necessario esaurirne dal primo fino all' ultimo termine le intere serie non meno in ciascuna specie, che in ciascun diverso apparato per dedurne in somma le particolari loro proporzioni. In vero se conosciute fossero le ragioni distinte, e i limiti fissi di tutte le varietà, che fin qui notate abbiamo, anche i fatti isolati, e i fenomeni solitarj condurci potrebbero a qualche precisa conseguenza. Poichè secondo le tavole di quelle cognite ragioni

ſi ridurrebbero que' fenomeni ad eſpreſſione, che foſſe al termine loro corriſpondente.

10. Ora finchè ſomiglianti tavole di riduzione non ſono che deſiderate, nè altrimenti cominciate, non che perfette, non avremo giammai per la conſueta e triviale maniera di fatti iſolati comunque coſtanti, ſe non riſultati affatto inſignificanti, e per fino contraddittorj; nè troveremo in eſſi altra eſpreſſione ſuori di quella delle noſtre prevenzioni. E quindi è che con arbitrarie, e ſuppoſte leggi per mero ſcambio di mezzo termine dedurremo da que' fatti le concluſioni, che dalle ſole ſuppoſizioni, e non altrimenti da que' fatti derivano. E perciò nella dovizia di ſperienze, e di macchine saremo poveriſſimi di giuſte idee, perchè non arriveremo mai neppure a ſoſpettare la genuina interpretazione di que' fatti, che tutto dì ci paſſano per mano, e molto meno concluder potremo da eſſi la proporzione delle incognite forze, e l'andamento delle incognite leggi, che incautamente prima di cominciare a rintracciarle pretendemmo di ſtabilire.

TEOREMA XVIII.

Le prime tavole altre ne ſomminiſtrano in fine, e ci porgono una formola generale per calcolare, e ridurre a confronto, e a comune miſura le ſerie precedenti con le ſeguenti nuove induzioni.

1. Le ſomme 39, e 51 eſprimono il valore d' una carica di quadro equivalente a quindici ſcariche della boccetta (*teor. xv. n.* 4.), e ſi dovrebbe ſimilmente ſommare ciaſcuna carica ſucceſſiva equivalente, e i ſucceſſivi termini di ſcariche per eſprimerne il corriſpondente valore. Ma ſe dalla prima ſomma ſi ſottragga il numero delle ſcariche di boccetta, che al primo termine corriſponde, ſi avrà per reſiduo la ſomma corriſpondente al ſecondo termine; e così procedendo collo ſteſſo canone in tutti i ſucceſſivi termini, ſi eſprimerà diſtintamente il loro riſpettivo valore, come nella ſeguente tavola, che ſi leggerà al pari delle precedenti dalla colonna di mezzo a dritta, e ſiniſtra.

Resinosa				Termini del quadro				Vitrea
39	. . .			15	. . .			51
35	= 4	— 39	=	14	= 51	— 6	=	45
31	= 4	— 35	=	13	= 45	— 5	=	40
27	= 4	— 31	=	12	= 40	— 4	=	36
23	= 4	— 27	=	11	= 36	— 4	=	32
19	= 4	— 23	=	10	= 32	— 4	=	28
16	= 3	— 19	=	9	= 28	— 4	=	24
13	= 3	— 16	=	8	= 24	— 4	=	20
10	= 3	— 13	=	7	= 20	— 4	=	16
7	= 3	— 10	=	6	= 16	— 3	=	13
5	= 2	— 7	=	5	= 13	— 3	=	10
3	= 2	— 5	=	4	= 10	— 3	=	7
1	= 2	— 3	=	3	= 7	— 3	=	4
		X	=	2	= 4	— 2	=	2
		0	=	1	= 2	— 1	=	1
229	. . .				. . .			329

2. Nello stesso modo si valuterà ciascun termine successivo della seconda boccetta a norma della tavola premessa nel teor. XV. n. 6. dichiarata nel teor. XVI. n. 4.

Resinosa.				Termini della seconda boccetta.				Vitrea.
9	. . .			6	. . .			15
6	= 3	— 9	=	5	= 15	— 5	=	10
3	= 3	— 6	=	4	= 10	— 4	=	6
1	= 2	— 3	=	3	= 6	— 3	=	3
		z	=	2	= 3	— 2	=	1
		0	=	1	= z	— . .		.
19	. . .				. . .			35

3. Il distinto valore del primo termine espresso in queste tavole si raccoglie riducendo a norma delle prime tavole (*teor. xv. n.* 4. *e* 6.) tutti i termini corrispondenti del quadro, e della seconda boccetta in una tavola comune, che è la seguente.

Tavola ridotta dei termini del quadro, e della seconda boccetta.

Resinosa.												Vitrea.
58	=	19	+	39	=	15	=	51	+	35	=	86
38	=	3	+	35	=	14	=	45	+	10	=	55
34	=	3	+	31	=	13	=	40	+	10	=	50
30	=	3	+	27	=	12	=	36	+	6	=	42
26	=	3	+	23	=	11	=	32	+	6	=	38
20	=	1	+	19	=	10	=	28	+	6	=	34
17	=	1	+	16	=	9	=	24	+	6	=	30
14	=	1	+	13	=	8	=	20	+	6	=	26
11	=	1	+	10	=	7	=	16	+	3	=	19
7	=	....		7	=	6	=	13	+	3	=	16
5	=	....		5	=	5	=	10	+	3	=	13
3	=	....		3	=	4	=	7	+	3	=	10
1	=	....		1	=	3	=	4	+	3	=	7
....	....	....	....	....		2	=	2	+	1	=	3
....	....	....	....	....		1	=	1	....	....	=	1
264	=	35	+	229	.....			329	+	101	=	430

4. Abbiamo qui una tavola dimostrativa, che tutte in sè comprende le ragioni del più alto termine, che distinto abbiamo nelle serie precedenti. Per trarne le ragioni particolari, che ad ogni successivo termine corrispondono, si sottragga dall' intera somma il numero, che il valore esprime di ciascun termine antecedente; e que' successivi residui ci somministreranno in fine la generale formola per valutare, e ridurre a confronto tutti i termini delle precedenti, e delle seguenti induzioni.

Tavola

Tavola ridotta del diſtinto valore di ciaſcun termine ſucceſſivo.

Reſinoſa				Vitrea.
264	=	15	=	430
206	=	14	=	344
168	=	13	=	289
134	=	12	=	239
104	=	11	=	197
78	=	10	=	159
58	=	9	=	125
41	=	8	=	85
27	=	7	=	69
16	=	6	=	50
9	=	5	=	34
4	=	4	=	21
1	=	3	=	11
		2	=	4
		1	=	1
1110	. . . . .			2058

5. Sono così dal ſommo all'imo riſoluti in diſtinte ragioni tutti que' termini, che propoſti abbiamo.

C A P O II.

Combinazioni di ſuperficie a vicenda oppoſte nell' indurre la carica colla reſinoſa, e vitrea elettricità.

MOltiplichiamo le induzioni, ed opponendo a vicenda diverſe forme di ſuperficie compiamo le gradazioni varie del relativo nome delle punte, e riduciamole perſino al contrappoſto di maggiori, ed eguali grandezze. Si compie così l' oggetto della prima, e ſeconda Parte in tutte le combinazioni, e ne' modi, coi quali s' induce nell' oppoſto quadro, e ſi raccoglie la carica colle due ſpecie di elettricità.

Fra tanta varietà di cariche, e fra tante differenze nel comporle, e raccoglierle un modo unico e ſempre uniforme

(qual è la successiva loro scarica nella boccetta) adopriamo per disfarle, ossia per risolverle, e ridurle a comune misura. Nella terza Parte procederà la cosa inversamente; e nulla curando la varietà dei modi d' indurre le cariche, le raccoglieremo per qualunque via ci si presenterà più spedita ad accrescerle. Ma ci occuperemo all' opposto delle combinazioni varie, che scemano le cariche, e le scompongono, rintracciando distintamente di que' modi varj le misure, e le proporzioni. Proseguiamo intanto colla seguente serie.

CON ELETTRICITA' RESINOSA.

PREPARAZIONE.

Termina il tubo o condottore nel solito globo senza veruna punta; ed a questo oppongo direttamente il consueto quadro verticale per modo, che quel globo ne guardi l' armatura in mezzo ai due terzi d' altezza. Il rimanente tutto sta come nelle serie del precedente capo, ed applico qui pure ad ogni termine quindici giri del disco, e di resinosa elettricità.

Alle due basi isolanti, che sostengono il quadro, sottopongo in questa, e in tutte le serie del presente capo un' ampia lastra di vetro nudo, e pulito per meglio conservare l' isolamento del quadro, e delle più ampie superficie, che nelle seguenti serie terminano l' opposto condottore.

SERIE 15.

1. Col globo a contatto dell' armatura si finì la carica in cinque scariche della consueta boccetta; a mezzo pollice in quattro; ad un pollice in tre; ad un pollice e mezzo in una; a due pollici non vi fu nel quadro se non luce pungente senza veruna forza scuotente.

2. Fino alla distanza d' un pollice ad ogni due in tre giri scoppiò la scintilla tra il globo e il quadro, ma ad un pollice e mezzo non vi fu più indizio di scintilla.

3. Dal principio de' giri fino all' atto, che scoppia la scintilla, il quadro è tratto al globo, e s' inclina ad esso notabilmente. Ma nello scoppio della scintilla resta il quadro in

libertà, e si restituisce per sè alla prima sua positura oscillando indietro quasichè fosse rispinto. E ciò si ripete similmente in ciascuna delle scintille, che sono tanto più frequenti, quanto è minore la distanza tra il globo e l' armatura.

4. Non ha qui luogo tra il globo e l' armatura del quadro il solito pendoletto. Rimane soltanto quel filo, e globetto, che pende dall' esteriore armatura, e questo nell' atto dei giri si vibra alquanto in fuori, benchè quell' armatura comunichi ampiamente col suolo per mezzo di due fili metallici, fra i quali a distanza di tre pollici dall' uno e dall' altro pende quel filo.

PREPARAZIONE.

Non più il condottore termina in globo, ma in una superficie piana di legno grossa dieci linee, tutta coperta di foglia di stagno, di figura simile all' armatura del quadro, e di grandezza un quarto della stessa, e perciò la chiamo *superficie d' un quarto*. Sta questa fissa all' estremità del globo in modo, che si presenta, e si conserva parallela in mezzo alla opposta armatura del quadro.

SERIE 16.

1. A contatto finì la carica in sette scariche della boccetta; a mezzo pollice in cinque; ad un pollice in quattro; ad un pollice e mezzo in due; a due pollici in una. A due pollici e mezzo vi è sola scossa nel quadro. A pollici tre più niuna luce affatto.

2. Si fanno qui a pari distanze più frequenti, che nella precedente serie, e prendono un tuono più grave le scintille; talchè fino a mezzo pollice scoppiano vive ad ogni giro.

3. Ad ognuna di esse precede l' accostamento, o inclinazione; e nell' atto, che scoppia, succede la restituzione del quadro. Onde questo si vede in continue oscillazioni sulla sua base.

4. Ad un pollice e mezzo, e fino ai due in vece di scintilla non si sentì, che un certo spruzzo, e quasi friggimento, o stridore cupo continuo. Ed a questo corrispondono

tenuiſſimi moti di accoſtamento, e reſtituzione del quadro, che ſembrano tremori.

PREPARAZIONE.

Soſtituiſco in fondo del globo una ſuperficie ſimile, e poſta ſimilmente, che la precedente, ma del doppio più grande, e perciò *la metà* dell' armatura del quadro, alla quale ſi preſenta nel mezzo affatto parallela.

SERIE 17.

1. A contatto finì la carica in otto ſcoſſe della boccetta; a mezzo pollice in ſei; ad un pollice in quattro; e ciò fino ad un pollice e mezzo; a due pollici in tre; a tre pollici in una; a tre e mezzo, e perfino ai quattro vi è ſcoſſa nel quadro; ai quattro e mezzo ancor luce ſcintillante; e vi fu l' ultimo cenno di luce perfino ai pollici cinque e mezzo.

2. Segue a farſi più grave il tuono delle ſcintille; ma qui ſi fanno più rare, che nella ſerie precedente; cioè a mezzo pollice ad ogni tre giri ſoltanto ſcoppia la ſcintilla; ad un pollice non più che ad ogni quattro in cinque giri. A due pollici più niuna ſcintilla, nè ſpruzzo, nè ſtridore.

3. Alle ſcintille corriſpondono previamente i moti d' inclinazione, e inſieme di reſtituzione del quadro.

PREPARAZIONE.

Alla ſuperficie di *metà* altra ne ſoſtituiſco ſimile, e ſimilmente poſta, che è *uguale* affatto all' armatura del quadro, a cui ſi preſenta in eguale altezza, e parallela.

SERIE 18.

1. A contatto finì la carica in nove della boccetta; a mezzo pollice in ſei; ad uno in cinque; ad uno e mezzo in tre; a due in una; ai tre l' ultima ſcoſſa nel quadro. Ai quattro nello ſteſſo non altro, che luce, che ai cinque pollici appena diede l' ultimo cenno.

2. Cresce oltre modo la frequenza, e la forza delle scintille nelle prime distanze fino ad un pollice; al di là del quale si fanno più rare, cioè ad un pollice e mezzo appena una ogni tre giri; e a due pollici non altro si sente, che uno spruzzo, o stridore cupo.

3. A mezzo pollice s' inclina il quadro fino a contatto col più alto lato dell' armatura, e fino dalla distanza d' un pollice s' inclina tuttavia quasi a contatto. Siccome ad ogni scoppio di scintilla si restituisce in dietro con impeto, così previamente fu sempre tratto all' opposta superficie con forza, che superò la pressione di due diti, coi quali tentai di fermarlo premendo sopra gli angoli superiori del vetro nudo. Ad un pollice e mezzo benchè fossero più rare le scintille, furono tuttavia forti in ciascuna le oscillazioni di accostamento, e di restituzione del quadro.

Osservazione I.

Raccolgo qui alcune osservazioni comuni a tutte queste serie.

1. Il pendoletto, che indicato abbiamo nel n. 4 della serie 15, segue nell' atto, che continuano i giri, a scostarsi anche oltre le distanze, nelle quali più non s' imprime nel quadro alcun cenno di luce. Tale scostamento, o divergenza non è mai molto grande, e ricade col finir dei giri.

2. Nel numero delle scariche della boccetta, e nei cenni di scossa, o luce tratti immediatamente dal quadro non riconobbi diversità veruna comunque nel trarre quelle scariche o scosse togliessi previamente affatto, o lasciassi intera nel conduttore, e nell' annessa superficie la loro elettricità, che ivi lungamente si mantiene. Nel contatto si traggono le scariche dalla superficie stessa applicata sull' armatura del quadro; e nelle successive distanze si traggono le scariche al solito dalle opposte armature senza toccar quella superficie. Ed è indifferente spogliar quella, e il tubo d' ogni elettricità o prima, o dopo che si scarichi il quadro.

3. Le attrazioni tra le superficie terminanti il tubo, e il quadro (le quali nel contatto loro non solo si combaciano, ma si comprimono strettamente l' una sull' altra con vera adesione) sussistono soltanto fin che durano i giri, e fino al mo-

mento della ſcintilla, come accade nei comuni combaciamenti del filo, e del pendoletto nella ſer. 5; e col finir dei giri, e collo ſcoppiar della ſcintilla ſvaniſcono. Nel contatto però l' adeſione è continua nell' atto, che ſi gira il diſco, poichè non vi ſono ſcintille.

4. Tanto l' adeſione in contatto, come le attrazioni nelle ſucceſſive diſtanze hanno certa proporzione, e colla quantità di elettricità, e colla grandezza di ambe le ſuperficie, che a vicenda ſi oppongano. Talchè come col globo è minima, così è maſſima l' attrazione, e l' adeſione colla intera ſuperficie uguale all' oppoſta armatura.

5. Non ommetterò le anomalie delle ſcintille, che ſi preſentano ne' ſucceſſivi aumenti da minore a maggior ſuperficie. Poichè col globo le ſcintille ceſſano dopo la diſtanza d' un pollice (*ſer.* 15. *n.* 2.), colla ſuperficie di quarto ne eſtendono lo ſpruzzo per fino ai due pollici (*ſer.* 16. *n.* 2.). Ma colla ſuperficie di metà, benchè creſca l' elettrica quantità, ſi fanno più rare le ſcintille, nè più fino ai due pollici ſi eſtende lo ſpruzzo delle medeſime (*ſer.* 17. *n.* 2.). E colla ſuperficie intera crebbe ſul principio la vivacità loro, ma non ne eſteſero lo ſtridore più in là dei due pollici come nella ſuperficie di quarto (*ſer.* 18. *n.* 2.).

6. Paragonando queſte diſtanze, alle quali ſi eſtende la ſcintilla, che non oltrepaſſano mai i due pollici, colle diſtanze alle quali ſegue ad imprimerſi nel quadro elettricità ſcuotente, che arriva fino ai quattro pollici (*ſer.* 17. *n.* 1.); è manifeſto, che la reſinoſa elettricità ſi raccoglie nell' oppoſto quadro anche quando tra la ſuperficie e l' armatura non paſſa più veruna ſcintilla, e ciò fino a diſtanze del doppio maggiori.

7. Preſentai in tutte queſte ſerie al condottore, o all' anneſſa ſuperficie una ſpranga metallica terminante in globo groſſo mezzo pollice; ed oſſervai, che nell' avvicinarſi di queſto globo quantunque fino dalla diſtanza di due, o tre pollici ſi ſcemaſſe nel tubo l' elettricità, nonpertanto la ſcintilla fra il globo ſteſſo e il condottore non iſcoppiò mai a diſtanza maggiore d' un pollice, anzi d' ordinario aſſai minore. E ſiccome nel numero precedente ſi vide ſprizzar la ſcintilla tra il condottore ſteſſo e il quadro fino alla diſtanza di due

pollici, perciò nella resinosa elettricità sbalza tra il condottore e l' opposto quadro la scintilla a distanze non meno di doppie, che non tra il condottore stesso, e tale globo, che esteriormente si presenta.

8. Questo globo per altro comincia a scemare l' elettricità del tubo alla distanza di due, e fino di tre pollici, come fino ai quattro si spinge dal tubo stesso l' elettricità scuotente nell' opposto quadro senza apparenza di scintille (*sopra n. 6.*). E perciò la resinosa elettricità, anche in tal sorta di condottori senza punte, si disperde, o passa senza strepito di scintille nell' opposto quadro, o in altro condottore a distanze doppie, e per fino triple di quelle, che alla scintilla corrispondono.

Osservazione 2.

Riduciamo qui pure in tavole a norma del teor. XIV. dal primo all' ultimo i termini delle scariche, colle quali si esaurì la carica nelle serie precedenti impressa con resinosa elettricità.

	A contatto.	Poll. ½.	Poll. I.	Poll. I½.	Poll. II.	Poll. II½.	Poll. III.	Poll. III½.	Poll. IV.	Poll. IV½.	Poll. V.	Poll. V½
15 =	5	4	3	1	x	o	o	o	o	o	o	o
16 =	7	5	4	2	1	X	o	o	o	o	o	o
17 =	8	5	4	4	3	2	1	X	X	x	x	x
18 =	9	6	5	3	1	X	X	x	x	x	x	o
ale =	29	20	16	10	4	2	1					

Osservazione 3.

Confrontando con queste, che sono proprie delle quattro ultime serie, le osservazioni, e le tavole delle serie precedenti di resinosa elettricità, ne risultano i più ovvj rapporti della stessa specie in tutte le differenti sue preparazioni, come ne' seguenti

COROLLARJ.

COROLL. 1. Nella ſteſſa ſpecie di reſinoſa elettricità ſe ſi conſideri la ſemplice ragione delle diſtanze nelle ſomme loro confuſe, il condottore terminante in punta imprime la carica nell' oppoſto quadro con forza ottupla, che non quando termina in globo, oſſia sferica, o altra piana ſuperficie.

Nella ſomma delle ſerie con punta di reſinoſa elettricità ſi trova fino ai pollici 24 l' ultima ſcoſſa tratta dal quadro (*teor. XIV. n.* 1.); e nella ſomma delle ſerie del condottore terminante in globo, o in piana ſuperficie non ſi trova l'ultima ſcoſſa ſimile al di là dei pollici 3 (*oſſ.* 2. *prec.*). E' dunque come 24 : 3.

COROLL. 2. Se nella ſteſſa ragione ſi paragonino i termini corriſpondenti nelle ſomme delle ſerie di punta, e di ſuperficie terminante il condottore non ha la punta di reſinoſa elettricità ſe non forza circa quintupla della sferica, o piana ſuperficie per imprimere la carica nell' oppoſto quadro.

Intendo per termini corriſpondenti i numeri proſſimi nelle ſomme delle ſcariche. Ora nelle ſerie di punte (*teor. XIV. n.* 1.) ſotto i pollici otto vi è la ſomma 36, cioè la più proſſima alla ſomma 29 del primo termine delle ſerie ultime (*oſſ.* 2.). Ma dai pollici otto finiſce ai 24 l' ultima ſcoſſa, che qui finiſce ai pollici 3. Dunque le diſtanze ſono come 16: 3, le quali ragguagliate per la maggiorità del termine 36 ſopra il 29, poſſono ridurſi circa come 15: 3

COROLL. 3. Se nello ſteſſo modo ſi paragoni diſtintamente l'azione della punta con certa grandezza di sferica, e piana ſuperficie, ſi riconoſce 1. la forza della punta poco meno di ſettupla del globo; 2. quintupla della ſuperficie di quarto; 3. poco più di quadrupla della ſuperficie di metà; 4. e più di ſettupla dell' intera ſuperficie uguale all' oppoſta armatura.

1. Nella ſerie 5 (*teor. XIV. n.* 1) il termine di ſcoſſe cinque è ai pollici 14; e l' ultima ſcoſſa arriva fino ai 24, e benchè nelle ſerie ſeguenti non ſi trovi il preciſo termine di cinque, pure ſe ſi prendano le diſtanze medie tra il termine proſſimo e l' ultima ſcoſſa, può con ſicurezza aſſumerſi di pollici 10 la diſtanza fra il termine di cinque all'ultima ſcoſ-

ſa,

ſa. Ma nella ſerie 15 (*oſſ. prec.*) dal termine primo di cinque ſcariche fino all'ultima col globo non vi è che la diſtanza di pollici $1\frac{1}{2}$; dunque riducendo ſono le diſtanze come 20 : 3, cioè la prima poco meno di ſettupla.

2. Nella ſerie 7 il termine di ſette ſcoſſe dai pollici 8 arriva fino ai 18 coll' ultima ſcoſſa; e ragguagliando gli altri termini proſſimi ſi trova poco più di dieci pollici la diſtanza loro dall'ultima. Ma nella ſerie 16 con ſuperficie di quarto dal primo termine di ſette ſcariche all' ultima ſcoſſa non vi ſono che pollici 2; dunque non è che quintupla in ragione delle diſtanze.

3. Nella ſerie 6 ai pollici 8 vi è il termine di otto ſcoſſe, che eſtende fino ai 21 l' ultima ſcoſſa; ed è perciò la diſtanza di pollici 13. Ma nella ſerie 17 con ſuperficie di metà dal primo termine di otto arriva fino ai pollici 3 l'ultima ſcoſſa; dunque la ragione delle diſtanze è come 13 : 3, cioè poco più di quadrupla.

4. Nella ſerie 7 e 8 ai pollici 4 vi è il termine di nove ſcariche, e nella ſerie 5 è ai pollici 8. Ora come in quelle dai quattro all' ultima ſcoſſa vi ſono 14 pollici, così in queſta dagli otto all' ultima vi ſono pollici 16: che per adequato ſi riducono ai pollici 15. Ma nella ſerie 18 dal primo termine di nove ſcoſſe fino all'ultima ſono pollici 2. Dunque è la ragione delle diſtanze come 15 : 2, cioè più di ſettupla.

Coroll. 4. Ma la punta ſteſſa nell' imprimere nell' oppoſto quadro la carica non eſtende nel frappoſto mezzo lo ſtrepito di ſcintilla ſe non a diſtanza ſubquadrupla, e perſino ſubottupla della rotonda, o piana ſuperficie.

Poichè colle punte lo ſtrepito della ſcintilla non oltrepaſſa la diſtanza di tre linee (*Cap. I. oſſ. 7. n. 1.*). All' oppoſto col condottore terminante in globo ſi eſtende tra queſto e il quadro la ſcintilla per lo meno ad un pollice, e con piana ſuperficie per fino ai due pollici (*oſſ. 1 n. 6.*).

Coroll. 5. Ed un globo di mezzo pollice, che eſteriormente a fianco ſi preſenta al condottore terminante in punta, non comincia a ſcemarne notabilmente l'elettricità, ſe non a diſtanza ſubdupla, che non quando il condottore imprime nell'oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Finchè verſo l' oppoſto quadro vi è punta quel globo, che di fianco ſi preſenta, non comincia a ſcemar notabilmente l' elettricità del condottore ſe non a diſtanza d'un pollice e mezzo (*Cap. I. oſſ.* 7. *n.* 2.), e quando al quadro quel condottore oppone la rotonda, o piana ſuperficie, ne ſcema quel globo ſteſſo l' elettricità per fino alla diſtanza di tre pollici (*oſſ.* 1. *n.* 6. 7.).

COROLL. 6. E tra quel globo e il condottore quando termina in punta non iſcoppia la ſcintilla, ſe non a diſtanza ſubdupla, e per fino ſubtripla, che non quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Quando il condottore oppone all' oppoſto quadro la punta non iſcoppia la ſcintilla tra il condottore e il globo, che a fianco ſi preſenta, ſe non a diſtanza di due linee, e al più di quattro (*Cap. I. oſſ.* 7. *n.* 2. 3.) ; e ſcoppia la ſcintilla ſteſſa anche a diſtanza maggiore d' un pollice, quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie (*oſſ.* 1. *n.* 7.) .

CON VITREA ELETTRICITA'.

PREPARAZIONE.

La ſteſſa, che nella ſerie 15.

SERIE 19.

1. A contatto con quindici giri s' impreſſe tanta carica, che finì in nove ſcariche della boccetta ; a mezzo pollice in otto ; ad uno in ſette ; ad uno e mezzo in tre ; ad uno e tre quarti più niuna ſcoſſa neppur nel ſolo quadro . A due pollici non ſi ottenne più dal quadro neppure il menomo cenno di luce.

2. Fino a mezzo pollice ad ogni giro ſcoppiò viviſſima la ſcintilla tra il globo ed il quadro. Ad un pollice fu egualmente forte, e non molto più rara, cioè ogni tre giri ſcoppiarono incirca due ſcintille . Ad un pollice e mezzo ſi fece più grave il tuono, e più raro lo ſcoppio della ſcintilla,

talchè appena una ne saltò ogni tre, o quattro giri: ad un pollice e tre quarti svanì ogni scintilla, nè vi fu indizio di spruzzo veruno.

3. Anche qui alle scintille precede l' inclinazione, o accostamento del quadro, e la sua restituzione nell' atto dello scoppio. Fu l' inclinazione, o accostamento assai più notabile, che nella resinosa, che a questa corrisponde.

4. Il pendoletto, che qui pure sta all' esteriore armatura del quadro in mezzo ai due fili metallici, si scostò nell' atto dei giri, e continuò a scostarsi anche al di là di due pollici, quando più non s' impresse nel quadro neppure cenno di luce. Dalle prime alle ultime distanze fu qui lo scostamento del pendolo assai maggiore, che non fu mai colla resinosa elettricità; e si mantenne anche finiti i giri del disco.

Preparazione.

La medesima della serie 16.

Serie 20.

1. A contatto s' impresse carica, che finì in tredeci scariche della boccetta; a mezzo pollice in dieci; ad uno in otto; ad uno e mezzo in sette; ad uno, e fino ai due e mezzo in cinque; ai tre in due; ai tre e un quarto in una; ai tre e mezzo sola scossa nel quadro. Ai tre e tre quarti appena un cenno di luce nel quadro. Ai quattro più nulla.

2. Continuo fu lo scoppio di scintille vivissime fino ad un pollice; nelle successive distanze si fecero alquanto più gravi, ma non molto più rare fino ai due pollici, e continuarono a spruzzo, e a scoppio serpeggiante perfino ai pollici tre e mezzo, ma ognora più gravi, e rare.

3. L' inclinazione, o l' accostamento del quadro corrisponde alla forza delle scintille fino alla distanza d' un pollice e mezzo; ma più in là fu l' accostamento assai minore, che non furono le scintille, e la carica impressa nel quadro.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie 17.

SERIE 21.

1. A contatto finì la carica in tredeci della boccetta; a mezzo pollice in nove; ad un pollice, e ad uno e mezzo in otto; ai due in ſette, e fino ai tre pollici ſi ebbero poco di meno. Ai tre e mezzo in tre. Ma ai tre e tre quarti appena vi fu ſenſo di ſcoſſa nel ſolo quadro. Dai quattro poi fino ai cinque pollici appena vi fu un cenno di luce neppur pungente nel ſolo quadro.

2. Scintille ſtridenti, e acute fino ad un pollice e mezzo; e continuano ſimili fino ai tre pollici, ſe non che ſi fanno ſucceſſivamente di tuono più grave. Dopo i tre ſi fanno anche più rare fino ai tre e mezzo. Fino ai quattro ſi ſente lo ſpruzzo d' una ſcintilluzza; e più in là non reſta ſenſo di ſpruzzo veruno.

3. L' accoſtamento del quadro fu ognora più notabile, che nelle ſerie precedenti. Ma dopo un pollice e mezzo fu aſſai indebolito, e s' indebolì vie più nelle ſucceſſive diſtanze, benchè continuaſſero vive le ſcintille, e la carica impreſſa nel quadro.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie 18.

SERIE 22.

1. A contatto finì la carica in tredeci come ſopra; a mezzo pollice in nove; ad uno in ſei; ad uno e mezzo in cinque; ai due in tre; ai due e mezzo in due; ai tre in una; ai tre e mezzo ſola ſcoſſa nel quadro; ai quattro ancor ſcintilla pungente; e fino ai cinque appena un cenno di luce.

2. Fino a mezzo pollice furono viviſſime, e continue le ſcintille. Si fecero gravi, e alquanto più rare ad un pollice.

Indi ad uno e mezzo furono graviſſime, e ancor più rare, talchè ai due pollici una appena ne ſcoppiò ogni ſei giri. Ai due pollici e mezzo non ſi ſentì, che qualche ſpruzzo interrotto, e grave; e più in là dei tre pollici non vi fu neppur ſenſo di ſpruzzo.

3. A mezzo pollice fu tanto forte la mutua attrazione della ſuperficie, e del quadro, che quella ſi ſpingeva innanzi ſollevando la baſe del condottore, benchè ſi caricaſſe d'un grave peſo; nè il quadro ſi poteva fermare premendone i due angoli ſuperiori con tutta la forza dell' indice di ambedue le mani. Ad un pollice continuò aſſai forte; e tanto qui come ad un mezzo pollice ad ogni ſcoppio di ſcintilla ſi reſtituì al ſolito la ſuperficie, e il quadro; onde furono continue, e grandi le loro oſcillazioni. Ad un pollice e mezzo ſcemarono, e così ſucceſſivamente in proporzione delle ſcintille, e della carica impreſſa nel quadro.

Osservazione 4.

Raccogliendo qui pure alcune oſſervazioni comuni alle quattro ultime ſerie di vitrea elettricità le paragoniamo alle corriſpondenti di reſinoſa.

1. Lo ſcoſtamento di quel pendoletto, che notato abbiamo nel n. 4 della ſer. 19, ſegue in tutte queſte, finchè continuano i giri, a mantenerſi aſſai più notabile, che nelle precedenti di reſinoſa, e molto al di là delle diſtanze, nelle quali s'imprime carica, o luce nel quadro. Nè qui col finir dei giri cade ſubito tanto nelle prime, come nelle ultime diſtanze.

2. E ſimilmente in tutte le diſtanze replicai le prove delle ſcariche, e delle ſcintille impreſſe nel quadro; nè trovai nel numero, e nella forza loro veruna differenza, comunque toglieſſi previamente ogni elettricità al tubo, e alla anneſſa ſuperficie, ovvero ivi laſciaſſi tutta l' elettricità, che ſi conſerva lungamente.

3. Le attrazioni, e adeſioni tra la ſuperficie e l' armatura del quadro ſuſſiſtono ſoltanto, finchè durano i giri, e fino allo ſcoppio della ſcintilla, come accade nei combaciamenti del filo nella ſer. 10. Nel che ſi diſtinguono dalle adeſioni, e attrazioni tra l' armatura e la nuda ſuperficie del

quadro, e da ogni genere di adesione tra il cuscinetto, il vetro con esso stroffinato, e tra molte lamine resistenti, o anche fogli di carta stroffinati insieme uno sopra l' altro. Nei quali casi, e altri simili sussiste l'adesione anche finiti i giri, e dopo tratta la scintilla.

4. Crescono qui quelle attrazioni con forza sorprendente, e assai più che nelle corrispondenti di resinosa. Conservano però similmente certa proporzione colla maggior estensione delle opposte superficie, e colla quantità di elettricità procedente dal condottore. Talchè non sembrano sostenersi, che per la viva, e continua permutazione di sostanze, ovvero dei soggetti della loro mutua azione, che in tal atto, e in conveniente quantità trapassano da una in altra superficie. In vero tanto nel filo della ser. 10, come nelle serie ultime se debole si rende l' elettricità, tanto meno è notabile l'adesione, e in fine diviene insensibile e nulla.

Sembra impossibile, che nascere possa, o sostenersi l' idea di fluido unico, ed espansivo in mente di chi veduto abbia da principio, o in fine veder voglia fenomeni tanto insigni, e costanti di mutua azione. Avrei desiderato di misurare con qualche precisione la forza corrispondente alle successive grandezze di superficie, e alla quantità di elettricità; ma non ebbi campo di fare per ciò le opportune preparazioni.

5. Le anomalie, che notate abbiamo nella frequenza, e nella forza delle scintille tra la superficie e 'l quadro nelle successive distanze, non cominciano qui dalla superficie di metà, come nella resinosa, ma dalla ultima superficie intera. Poichè nella ser. 20, e 21 si estesero le scintille, e gli spruzzi per fino ai quattro pollici (ivi *n.* 2.), e nella ser. 22. n. 2. non arrivano più in là dei tre pollici.

6. Paragonando le distanze, nelle quali scoppiano, o spruzzano le scintille tra la superficie e il quadro in tutte le serie di vitrea elettricità, corrispondono quelle appuntino alle distanze, nelle quali segue ad imprimersi alcuna forza scuotente nello stesso quadro. Poichè dalla ser. 19 alla 22 n. 1, e 2 svanisce questa nel momento, che finiscono gli ultimi spruzzi delle scintille. Onde la vitrea elettricità non si raccoglie qui nell' opposto quadro, se non a distanze, e in copia proporzionali al numero, e alla forza delle scintille.

7. Presentando qui pure al tubo, o all' annessa superficie una spranga metallica terminante in globo grosso mezzo pollice ne ebbi scintille vivissime, e veramente scuotenti, e serpeggianti fino alla distanza di tre pollici massime nell' ultima serie. Non ho mai altrimenti osservato verun modo di elevare al sommo la capacità d' un condottore, quanto nell' ultima preparazione, in cui questo presenta a certa distanza un' uguale superficie all' opposto quadro. E in quest' ultima serie la scintilla dalla superficie al quadro non iscoppiò notabilmente al di là di tre pollici; onde sembra, che le anomalie di maggiori distanze nella serie 20, e 21 notate più sopra al n. 5, siccome le corrispondenti, che notate abbiamo al n. 5. della oss. 1, dipendano da certa grandezza di superficie opposte, o presentate. E perciò ristringendoci all' ultima preparazione troviamo, che nella vitrea elettricità la scintilla tra il condottore e l' opposto quadro non iscoppia a distanze molto maggiori, che non tra il condottore medesimo e tale globo, che esteriormente si presenta.

8. Questo globo però, che al condottore si presenta, non fa in esso notabile diminuzione di elettricità nelle maggiori distanze, finchè non incomincia a trarre qualche spruzzo o stridore di scintilla. Siccome dal condottore stesso non si spinge nell' opposto quadro veruna forza di carica, se non a distanze corrispondenti allo scoppio, o spruzzo delle scintille (sopra *n. 6.*). Onde anche in tali forme di condottori la vitrea elettricità non si disperde, nè passa tacitamente, come la resinosa, nell' opposto quadro, o in altro condottore se non a distanze proporzionate allo strepito, e scoppio delle scintille.

OSSERVAZIONE 5.

Riduciamo similmente in una tavola i numeri, che esprimono la forza scuotente nel quadro impressa con vitrea elettricità nelle successive distanze.

	A contatto.	Poll. ½.	Poll. I.	Poll. I½.	Poll. II.	Poll. II½.	Poll. III.	Poll. III½.	Poll. IV.	Poll. IV½.	Poll. V.	Poll. V½.	Poll. VI.
Ser. 19 =	9	8	7	3	o	o	o	o	o	o	o	o	o
Ser. 20 =	13	10	8	7	5	5	2	X	o	o	o	o	o
Ser. 21 =	13	9	8	8	7	7	6	3	x	x	x	o	o
Ser. 22 =	13	9	6	5	3	2	1	X	x	x	x	o	o
Totale =	48	36	29	23	15	14	9	3					

Paragonando la ſerie 21 colla precedente 20, e colla ſeguente 22, nelle quali i primi termini a contatto ſono eguali, reſta evidente, come qui ſopra accennai (*n.* 7.), che le diſtanze, alle quali s' eſtendono le ſcintille, e le cariche corriſpondenti tra il condottore e l' oppoſto quadro, o altro condottore, dipendono da certa grandezza, e proporzione delle ſuperficie oppoſte, e preſentate, e non dalla ſola quantità di elettricità.

OSSERVAZIONE. 6.

E confrontando queſte, che alle quattro ultime ſerie appartengono, colle tavole, e oſſervazioni delle ſerie precedenti di vitrea elettricità deduciamo i rapporti della ſteſſa ſpecie nelle diverſe preparazioni ne' ſeguenti

COROLLARJ.

COROLL. I. Nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità ſe ſi conſideri la ſemplice ragione delle diſtanze nelle ſomme loro confuſe il condottore terminante in punta imprime la carica nell' oppoſto quadro con forza poco più di quintupla, che non quando termina in globo, oſſia sferica, o altra piana ſuperficie.

Nella tavola delle ſerie con punta di vitrea elettricità ſi trova ſoltanto ai pollici XVIII il termine ſommato di 3 ſcariche tratte dal quadro (*teor. XIV. n.* 2.). E nella tavola delle ſerie di ſimile elettricità col condottore terminante in globo, e in piane ſuperficie ſi trova il termine di tre ſcariche ai pollici III ½ (*oſſ.* 5. *prec.*). E' dunque la relativa forza come 18 : 3 ½, e riducendo come 36 : 7; cioè poco più di quintupla.

COROLL.

Coroll. 2. Che se nella stessa ragione distintamente si paragonino i termini corrispondenti nelle somme di quelle tavole, non hanno le punte di vitrea elettricità se non forza poco meno di quintupla delle sferiche, o piane superficie per imprimerne la carica nell' opposto quadro.

Prendiamo nelle stesse tavole i numeri eguali, o più prossimi che nelle somme dei primi, ed ultimi termini si corrispondono. Nelle serie di punte ad un pollice vi è la somma 45, che è la più prossima alla somma 48 del primo termine delle serie di superficie. Ma in quelle arriva fino ai pollici III $\frac{1}{2}$. Dunque sono le distanze pollici 17 : 3 $\frac{1}{2}$, le quali ridotte come 34 : 7 sono in minor ragione di quintupla. Può per altro accrescersi alquanto tale ragione per la differenza dei termini primi 48, e 45, che porterebbe di più una sedicesima d'un pollice nel numero 34, o di meno nel numero 7.

Coroll. 3. Che se nello stesso modo si paragoni distintamente la forza delle punte con ciascuna grandezza di sferica, o piana superficie, si riconosce la forza delle punte 1. circa quadrupla del globo; 2. e similmente quadrupla della piana superficie di quarto; 3. più di tripla della superficie di metà; 4. e quintupla dell' intera superficie uguale all' opposta armatura.

1. Nella serie 10 il termine di scosse 9 è ai pollici II, e il termine di scosse 3 ai pollici VIII; e benchè nelle serie seguenti non s' incontrino in una stessa serie i termini precisi di 9, e 3, pure se si prendono le distanze medie tra il primo e l'ultimo dei termini prossimi, si trova in circa adequata la distanza di quella prima serie di pollici VI.

Ma nella serie 19 col globo tra il primo termine 9 e l' ultimo 3 vi è la distanza di pollici 1 $\frac{1}{2}$. Dunque riducendo sono le distanze incirca come 12 : 3, ed è perciò circa quadrupla la ragione loro.

2. Non si trovano in nessuna delle serie di punta esatti i termini di 13 scariche, e 2 in fine, come nella serie 20 con superficie di quarto, fra i quali termini la distanza è di pollici III.

Ma ragguagliando le serie 10, 11, e 14, nelle quali sono i termini più prossimi ai 13, e 2, si trova tale distanza tra i pollici VIII, e XIV, cioè verso i pollici XII. Onde risulta incirca quadrupla la ragione loro.

3. Nella ſerie 10 ſono preciſamente i termini 13, e 3 alla diſtanza di pollici VIII. Nella ſerie 11 tra i pollici VIII, e XIV; e nelle ultime ſono pure verſo i pollici XIV. Può quindi prenderſi circa di pollici XII l' adequata diſtanza di que' termini.

Ma nella ſerie 21 con ſuperficie di metà tra il primo 13 e l' ultimo 3 vi è la diſtanza di pollici III $\frac{1}{2}$. Dunque riducendo è la ragione loro come ſono le diſtanze 24 : 7, cioè più di tripla.

4. Nella ſerie 10, e 11 in fine ſono i termini preciſi di 13, e 1 alla diſtanza di XIV pollici. Per le ſerie 13, e 14 ſembra poterſi eſtendere ſicuramente di più oltre i pollici XV.

Ma nella ſerie 22 con ſuperficie intera eguale all' oppoſta armatura non vi ſono, che pollici III fra i termini 13, e 1. Dunque in ragione delle diſtanze ſarebbe la relativa loro forza come 15 : 3 cioè quintupla.

Coroll. 4. Ma la ſteſſa punta nell' imprimere nell' oppoſto quadro la carica non eſtende nel frappoſto mezzo lo ſtrepito di ſcintilla, ſe non a diſtanza ſubdupla, e perfino ſubquadrupla della rotonda, o piana ſuperficie.

Dalla punta del condottore all' oppoſta ſcoppia la ſcintilla fino alla diſtanza di linee nove (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 1.); e dal condottore ſteſſo terminante in globo, o in piana ſuperficie ſcoppia a diſtanza d' un pollice e mezzo, colla quale è ſubdupla; e al più di tre pollici, coi quali è ſubquadrupla (*oſſ.* 4. *n.* 6.).

Coroll. 5. Ed un globo di mezzo pollice, che eſteriormente ſi preſenta a fianco del condottore terminante in punta, comincia a diminuirne l' elettricità a diſtanza ſubtripla, che quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Col globo, che a fianco ſi preſenta, non comincia nel primo caſo a ſcemarſi l' elettricità del condottore, ſe non alla diſtanza di un pollice (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 2. 3.); e nel ſecondo caſo comincia a ſcemarſi fino alla diſtanza di pollici tre (*oſſ.* 4. *n.* 8.), alla quale diſtanza ſegue ad imprimerſi la carica (*ivi n.* 6.).

Coroll. 6. E tra quel globo, che ſi preſenta, e 'l condottore terminante in punta ſcoppia la ſcintilla a diſtanza

ſubtripla, che non quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Con punta al condottore ſcoppia la ſcintilla a diſtanza d' un pollice (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 3.). Ma terminando il condottore in rotonda, o piana ſuperficie ſcoppia la ſcintilla tra queſta e il globo, che ſi preſenta, oltre la diſtanza di pollici tre (*oſſ.* 4. *n.* 7.).

OSSERVAZIONE 7.

Confrontiamo in fine le ultime tavole di reſinoſa, e di vitrea elettricità nelle oppoſte ſuperficie per compiere le propoſte induzioni, e dedurne i generali reſultati, e le diſtinte loro proporzioni.

TEOREMA XIX.

In tutte le ſerie con ſuperficie di reſinoſa elettricità le progreſſioni della carica impreſſa nell' oppoſto quadro eccedono le corriſpondenti progreſſioni con ſuperficie di vitrea.

1. Riduciamo tutti i primi, ed ultimi termini alle riſpettive diſtanze nelle tavole di reſinoſa (*oſſ.* 2.), e di vitrea elettricità (*oſſ.* 5.).

Gli ultimi cenni di luce ſi eſtendono colla reſinoſa fino ai	poll. 6	
Gli ultimi cenni ſimili colla vitrea non oltrepaſſano i		poll. . . . 5
L' ultimo grado di forza ſcuotente *X* nel quadro colla reſinoſa	poll. 4	
L' ultimo grado ſimile colla vitrea non oltrepaſſa i		poll. . . . $3\frac{1}{2}$
L' ultima ſcoſſa nella boccetta arriva colla reſinoſa fino ai	poll. 3	
L' ultima ſcoſſa ſimile colla vitrea ſi ha fino ai		poll. . . . $3\frac{1}{2}$
Totale	poll. 13 : 12	

2. Sarebbe maggiore della vitrea la somma delle distanze di resinosa, quando anche i primi termini dell' una e dell' altra fossero uguali. Ma nella resinosa la somma dei primi termini non è che 29, e la corrispondente alla vitrea è 48. Supponendo per ora il valore di questi numeri proporzionale alle loro unità (la quale supposizione scema anche più del giusto i mutui rapporti), e calcolandone le proporzioni colle semplici ragioni delle distanze, e delle forze supposte corrispondenti ai primi loro termini, dobbiamo invertere questi numeri, e comporli colla ragione delle distanze. Sarà dunque la resinosa alla vitrea come $13 \times 48 : 12 \times 29 = 624 : 348 = 52 : 29$.

3. Ed esprimendo questa ragione con fenomeni di cariche, sarà la resinosa alla vitrea come una carica equivalente a 52 di quelle unità ad altra carica equivalente a 29 delle stesse unità.

4. Prima di confrontare i termini corrispondenti, osserviamo, che le contrapposizioni tra la resinosa e la vitrea elettricità non concorrono similmente, anzi in qualche modo si oppongono a quelle, che osservammo nel n. 7. del Teor. XIV. Per rendere ciò più evidente riduciamo in una tavola tutti que' numeri dal contatto fino alle ultime distanze colle frazioni prossimamente indicanti le rispettive differenze tra i termini, che immediatamente si succedono.

Resinosa A contatto Vitrea

Differenze		29 .	Primo termine	. 48	Differenze	
$\frac{1}{3}$ =	9 =	20 . . .	Poll. $\frac{1}{2}$ . . .	36 =	12 =	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$ =	4 =	16	I . . .	29 =	7 =	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{3}$ =	6 =	10	I $\frac{1}{2}$ . .	23 =	6 =	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{5}$ =	6 =	4	II . .	15 =	8 =	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$ =	2 =	2	II $\frac{1}{2}$ . .	14 =	1 =	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{2}$ =	1 =	1	III . .	9 =	5 =	$\frac{1}{3}$
	1 =	X	III $\frac{1}{2}$ . .	3 =	6 =	$\frac{2}{5}$
	0 =	X	IV . .	x =	$3 + X$	

Rintraccieremo in ſeguito la cauſa tanto delle prime, che delle nuove contrappoſizioni, e anomalie. E frattanto in propoſito noſtro vediamo, che nei ſucceſſivi termini delle due ſpecie è mal ſicuro il confronto tanto in ragione del numerico loro valore, che delle diſtanze; poichè non ſeguono eſſi verun andamento coſtante ſecondo quelle ſemplici ragioni.

5. Contuttociò raccogliendo gli eſtremi delle ſomme corriſpondenti ſono nella reſinoſa dal primo termine all' ultima ſcoſſa di boccetta pollici tre, e all' ultima di quadro pollici quattro; e nella vitrea dal termine corriſpondente 29, che nelle ſomme è alla diſtanza d' un pollice, fino alle ultime ſcoſſe tanto di boccetta, che di quadro, ſono pollici due e mezzo. Onde riducendo le ragioni ſono come . . . . 6 : 5
e come . . . . 8 : 5

e nella ſomma totale come . . . . 14 : 10
e componendole ſono come 48 : 25.

6. E confrontando nelle ſerie diſtinte ciaſcun termine, o numero corriſpondente ſono le diſtanze

Ser. 15.	Dalle cinque all' ultima pollici	$1\frac{1}{2}$	
Ser. 19.	Fra i termini proſſimi alle cinque all' ultima poll.		$0\frac{1}{2}$
Ser. 16.	Dalle ſette all' ultima poll. .	2	
Ser. 20.	Dalle ſette all' ultima poll. . . .		$1\frac{1}{2}$
Ser. 17.	Dalle otto all' ultima poll. .	3	
Ser. 21.	Dalle otto all' ultima poll. . . .		$2\frac{1}{2}$
Ser. 18.	Dalle nove all' ultima poll. .	2	
Ser. 22.	Dalle nove all' ultima poll. . . .		$2\frac{1}{2}$
	Totale . . Poll.	$8\frac{1}{2}$:	7 = 17 : 14

E componendole ſono come 288 : 75, proſſimamente = 4 : 1.

7. Onde benchè i rapporti delle diſtanze, e del numerico valore de' termini non comprendano ſe non in parte le vere proporzioni delle due ſpecie di elettricità; ciò non pertanto in qualſivoglia calcolo delle loro ragioni riconoſciamo la reſinoſa maggiore della vitrea. Non altro pertanto ci rimane, che di raccogliere ne' ſeguenti teoremi le funzioni di tutti i termini, che a compiere quella maggior ragione concorrono.

TEOREMA XX.

Raccogliendo insieme le combinazioni di punte, e di superficie a vicenda opposte risultano le punte, e superficie di resinosa elettricità superiori alla vitrea 1. nelle semplici ragioni delle distanze; 2. nel confuso valore della numerica loro espressione; 3. e nelle complicate funzioni de' fenomeni.

1. Primieramente nelle combinazioni di punte, e di superficie opposte a punte (*teor. XIV. n.* 3.) sono le distanze nella somma de' termini corrispondenti dalla resinosa alla vitrea elettricità di pollici . . . . 53 : 32

E nelle combinazioni di superficie a vicenda opposte secondo le ragioni degli ultimi cenni di luce, e delle ultime scosse della boccetta, e del quadro (*teor.* 19. *n.* 1.) sono poll. . . . . 13 : 12

E nelle somme de' termini corrispondenti all' ultima scossa della boccetta, e del quadro (*ivi n.* 5.) composte insieme sono . . . . 48 : 25

E sommate (*ivi*) sono poll. . . . . 14 : 10

E nel confronto de' termini corrispondenti alternamente sommati insieme (*ivi n.* 6.) sono poll. $8\frac{1}{2}$: 7, ossia . . . . 17 : 14

Onde nelle semplici ragioni delle distanze sono le somme . . . . 145 : 93

2. E nuovamente nelle combinazioni di punte sono nel confuso valore della numerica loro espressione (*teor. XIV. n.* 4.) come . . . . 225 : 144

E nelle combinazioni di superficie sono (*teor. prec. n.* 2.) come . . . . 52 : 29

E perciò sommate insieme sono . . . totale 277 : 173

Le quali ridotte a minimi termini sono prossimamente come . . . . 27 : 17

3. Ed esprimendone il valore con le complicate funzioni di fenomeni si ridusse la resinosa tanto superiore alla vitrea nelle combinazioni di punte (*teor. XIV. n.* 5.), quanto lo è una carica espressa con 225 ad altra espressa con 144 di quelle unità.

E ſu ſimilmente nelle ſuperficie (*teor. prec. n.* 3.) la reſinoſa tanto ſuperiore alla vitrea, quanto una carica equivalente a 52 lo è ad altra equivalente a 29 di quelle unità.

Quindi ſommando e riducendo come ſopra a minimi termini ſono come 27 : 17.

4. E ſiccome non ſi cerca qui ſe non la complicata funzione de' fenomeni, ſi combineranno i precedenti numeri inſieme colla moltiplicazione, invece della ſemplice ſomma; indi ſi eſprimerà la proporzione loro in fenomeni di cariche equivalenti ai numeri 225×52, e $144 \times 29 = 11700 : 4176$ che è più di dupla.

TEOREMA XXI.

Che ſe inſieme ſi compongono le ſemplici ragioni delle diſtanze col confuſo valore della numerica eſpreſſione, e colle complicate funzioni de' fenomeni, riſultano in tutte le precedenti combinazioni vie più inſigni le varie ragioni di ſuperiorità della reſinoſa ſopra la vitrea elettricità.

1. Per raccogliere inſieme le precedenti ragioni ſommando ſarebbero nel precedente Teorema n. 1, 2, e 3. . 145 : 93

	145 : 93
	27 : 17
	27 : 17
Totale	199 : 127

2. Ora moltiplicando le ſemplici ragioni delle diſtanze pel confuſo valore della numerica eſpreſſione ridotta ſarà $145 \times 27 : 93 \times 17 = 3915 : 1581$.

Che ſe queſto ſi moltiplichi per l' eſpreſſione de' fenomeni ridotta ſimilmente in numeri 27 : 17; riſultano i prodotti 105705 : 26677.

I quali ſono proſſimamente in ragione quadrupla.

3. Se poi quel primo prodotto . . . . 7840 : 2697
ſi ſommi col prodotto de' ſenomeni (*teor. prec.* *n.* 4.) . . . . 11700 : 4176
ſarà la ragione delle ſomme . . . . 19540 : 6883
cioè proſſimamente tripla.

Onde e ſommando, e moltiplicando riſultano vie più inſigni, e varie le indicate ragioni.

TEOREMA XXII.

Non meno queſte ſemplici ragioni ſommate, che i loro prodotti ſi approſſimano colle corriſpondenti proporzioni, che dedotte abbiamo nella prima Parte, e ſi ragguagliano inſieme.

1. Se nella prima Parte (*teor. 1.*) ſommiamo le ſole prime ragioni delle diſtanze di piena carica, di metà, e dell' ultimo termine della ſcoſſa ſenza verun riguardo alle ſeconde ragioni dell' iſolamento, colle quali furono compoſte, abbiamo le ragioni . . . . 4 : 2
8 : 6
7 : 6
Totale 19 : 14

Similmente ſe nel Teor. XIV. n. 3., e nel Teor. XIX. n. 1, 5, e 6 ſi ſommino le ſemplici diſtanze, e ſi laſci fuori la ragion compoſta di 48 : 25, abbiamo . . . . 53 : 32
13 : 12
14 : 10
17 : 14
Totale 97 : 68

Sommando colla precedente . . . . 19 : 14

abbiamo l' intera ſomma . . . . 116 : 82

la quale diviſa per due ci ſomminiſtra la ragguagliata ragione . . . , ... = 58 : 41
e ridotta a minori termini dividendo per tre reſta = $19\frac{2}{3} : 13\frac{2}{3}$.
poco diverſa dalla prima.

2. Fu nel Teorema I. colla moltiplicazione delle diſtanze per l' inverſa degl' iſolamenti dedotta la ragione di que' fenomeni quadrupla.

E ſimilmente nel precedente Teorema n. 2. per la moltiplicazione delle diſtanze colla numerica eſpreſſione de' fenomeni ridotti ſi ebbe la compoſta ragione proſſimamente quadrupla; nel che ſi trovano ragguagliate quelle ragioni.

3. In fine del Teorema III. ſi calcolò la ragione loro, ſecondo diverſi riguardi, meno di quadrupla, e più di dupla.

E nel precedente Teorema n. 3, ſiccome pure nel Teo-
rema

rema XX. n. 4. si calcolò similmente in adequato poco meno di tripla.

Onde tanto nelle somme, che nei prodotti concordano con quelli della prima i risultati della seconda Parte, e vengono prossimamente a ragguagliarsi.

TEOREMA XXIII.

Le confuse ragioni, che dai fenomeni dedotte abbiamo tanto nella prima, che nella seconda Parte, si risolvono in ragioni distinte riducendone secondo le nuove tavole del Teorema XVIII a comune misura i termini corrispondenti di tutte le premesse induzioni.

TEOREMA XXIV.

E con queste distinte ragioni si ragguagliano le proporzioni tutte corrispondenti alle diverse preparazioni in ciascuna specie di elettricità

TEOREMA XXV.

E quelle distinte ragioni, ed il ragguaglio loro con le proporzioni di resinosa, e di vitrea elettricità nelle diverse preparazioni di ciascuna specie, e nelle corrispondenti opposte, riducono a piena evidenza gli elementi d'ogni elettrica azione, che fra le punte distinti abbiamo nella prima Parte, e ci porgono prevj lumi, e fondamenti stabili della nuova teoria, che andiamo rintracciando.

OSSERVAZIONE 8.

Dei tre ultimi Teoremi non soggiungo veruna dimostrazione. In due aspetti può concepirsi la dimostrazione loro, o generalmente, o particolarmente; e nell' uno, e nell' altro aspetto giudico meglio di ommetterla. Poichè nel primo, sono abbastanza evidenti per sè stessi come canoni di ampissime induzioni distinte, che tutte comprender debbono, ed esaurire le ragioni d' ogni elettrico fenomeno. Dalla enumerazio-

ne, e dal compimento di quelle induzioni verranno que' teoremi più efficacemente comprovati, che non con generiche espressioni di raziocinio. Ed appunto l' estensione stessa, e la moltiplicità di simili prove non ci lasciano qui luogo d' intraprendere nel secondo aspetto a dimostrarli particolarmente. Sono alla terza Parte riservate le ragioni delle cariche, e scariche elettriche, ed alla stessa si aggiungono altre Memorie sulle ragioni della adesione, e dei moti elettrici, e sopra ogni maniera di eccitamento, e di estinzione delle elettriche potenze. Ma quanto ai fenomeni dell' elettrica luce cercherò di ridurli a distinte ragioni nel seguente Capo terzo, con cui fin da principio proposi di por termine alla seconda Parte della presente Introduzione.

CAPO III.

Dei Fenomeni dell' elettrica luce.

PRima delle luminose sperienze di *Hauksbee*, *Gray*, *Du-Fay*, e *Bose* non distinsero comunemente i Fisici l' elettrica dalla fosforica luce; e restò tuttavia dopo quelle tanta prevenzione per la supposta mancanza di calore nell' elettrica del pari, e nella fosforica luce, che fredde si credettero persino le metalliche fusioni fatte con elettrica scintilla; nè vi andò meno de' nuovi, e palpabili cimenti di *Kinnersley*, e di *Priestley* per concludere in fine, che sono esse infuocate, ed ardenti.

Non isfuggirono a *Du-Fay*, e a *Bose* quelle differenze di figura, di grandezza, e di colore ne' fiocchi, o raggi luminosi, che brillano nelle tenebre agli spigoli, o alle estremità degli elettrici condottori; e ne trassero indi argomento per distinguere le due opposte specie di elettricità, che nominarono *vitrea*, e *resinosa*; le quali furono da *Kinnersley*, e da *le Roy*, e da *Symmer* con piena evidenza dimostrate meglio colla reciproca loro estinzione, e colle leggi dei moti loro, che non colle semplici varietà di luce.

Descriverò io pertanto l' impressione dell' elettrica luce secondo la realità de' fenomeni prescindendo per quanto sia possibile da qualsivoglia espressione di ipotetico linguaggio, o di

ſiſtematico criterio. E cominciando a ridurre ſotto certi capi le circoſtanze, che coſtantemente, e generalmente producono, o accompagnano qualunque apparenza di elettrica luce, paſſerò indi a diſtinguerne ordinatamente la varietà, e le differenze di figura, di grandezza, e di colore; e dal compleſſo in fine delle generali, e particolari leggi di que' ſenomeni tenterò di dedurne alcun lume di teorica applicazione.

ARTICOLO I.

Leggi de' generali ſenomeni della elettrica luce.

NIuno pensò fin ora a diſtinguere i generali dai particolari ſenomeni dell' elettrica luce, non che a fiſſarne diſtinte leggi. Spererò io d' incominciarne, e di compierne in un ſol tempo l' impreſa? Son certo d' incominciarla; e ſia nel rimanente libero ad altri il giudizio o di riconoſcerla compiuta, o di compierla più felicemente.

Legge Prima. Non v' ha elettrica luce, ſe non in quanto ſuſſiſte, cioè o ſi eccita, o ſi rinnova il moto della ſteſſa elettricità.

1. Or queſto moto può farſi in due modi, o ſeparando l' una dall' altra le oppoſte ſpecie, che ſtanno inſieme unite, e ſpente, ovvero riunendo inſieme l' una coll' altra le due ſpecie, che furono previamente diviſe, e ſciolte. Si chiamò quel primo da' Frankliniani *turbamento di equilibrio*, come l' altro ſi appella *reſtituzione, o ritorno all' equilibrio naturale.*

2. E quanto al modo primo a niuno è ignoto, che nei lembi della mano, o del cuſcinetto, con cui ſi ſtroffina il cilindro, o il diſco dell' elettrica macchina, appariſce luce, finchè colla rotazione di queſti ſi mantiene vivo il moto della elettricità eccitata. Sprizzano ſimilmente or più, or meno, finchè tal moto ſuſſiſte, dagli ſpigoli, o dalle punte del condottore certe lucide ſiammelle. Ma ceſſa ogni luminoſa apparenza ceſſando la rotazione, che quel moto produce.

E nel ſecondo modo, ſe al condottore elettrico ſi preſenta altro corpo capace d' indurre moto in quella elettrica potenza, ſi ha ſecondo la proporzione del moto ſteſſo l' elettrica luce.

3. Ma qui d'uopo è rilevare un capitale errore, che è comunemente invalso per mera illusione del Frankliniano linguaggio. Tra quel condottore e un corpo resistente appressato non vi è luce secondo i Frankliniani, perchè in questo non può spandersi ad equilibrio il fluido condensato in quel primo; vi è bensì luce tra quello e un nuovo condottore, che si appressi, perchè in questo quel fluido più denso si spande, e si divide.

4. Il fatto nella prima sua parte è ordinariamente vero, ma falsa è la ragione, da cui si ripete. E con questa falsità appunto si adottò per contraria ragione come un fatto la seconda parte, mentre questa è falsa in fatto, quanto false sono e quella prima, e questa contraria ragione, d'onde si derivò. Dico dunque, che una sfera metallica, che non oltrepassi il diametro di due pollici, purchè bene ed esattamente isolata si appressi fino a minima distanza a quel condottore comunque elettrico, non ammette il menomo cenno di luce, come ritirandola dopo tale approssimamento non ritiene la menoma ombra di elettricità. Io l'ho provato più e più volte, e ne' tempi propizj alla ingenuità degli elettrici fenomeni mi è costantemente riuscita la cosa appuntino, come l'asserisco; e sono certissimo che non riuscirà mai altrimenti a chi vorrà debitamente convincersene colla propria esperienza.

5. Troppo mi scosterei dal proposto argomento se proseguir volessi gli accidenti, che in simil foggia di sperienze occorrono variando l'isolamento, e la grandezza, e la figura de' corpi, che si presentano. Saranno quelli più opportunamente distinti in altre Memorie; ed avvertirò frattanto, che brilla talvolta manifesta luce nel condottore elettrico, o nel corpo isolato, che ad esso si presenta. Ma ben lungi che ciò accada come i Frankliniani la discorrono per semplice trapasso, ed espansione del primo fluido, si riconosce all' opposto per tal atto nel corpo presentato l' elettricità contraria alla prima del condottore; quando dovrebbe pur trovarsi l' omologa in proporzione della luce, se nascesse questa, o si eccitasse per semplice moto e distribuzione d' un fluido solo.

Legge seconda. Ed è del pari necessario il moto della elettrica potenza, acciò luce si manifesti. 1. ne' condottori; 2. ne' resistenti rispettivamente fra loro; 3. ovvero fra gli uni, e gli altri alternamente.

1. Nella consueta macchina elettrica tra il condottore e il dito, o altro condottore non isolato, che si avvicini, brilla continuo splendore, o scintillazion, finchè si gira il disco; cioè finchè la causa sussiste di moto dell' elettrica potenza fra l' uno e l' altro condottore. Cessando i giri del disco non brilla tra il condottore e il dito altra luce, o scintilla, se non in proporzione del moto, che nella elettricità residua s' induce col successivo accostamento d' un esterno condottore.

Simili fenomeni si rendono più composti, ed insigni, se a proporzionate distanze del primo condottore si collochi una serie di condottori isolati di figure diverse, e s' induca indi, o si tolga la capacità, e successione di moto della elettrica potenza fra tutti, o parte di que' condottori presentando or all' ultimo, or agli intermedj la mano. Poichè nell' atto stesso, che s' interrompe, o si apre l' adito al moto della loro elettricità, si rende nullo, o si manifesta, e si accresce ne' medesimi l' elettrico splendore.

In quella serie di macchinette attraverso delle quali io traggo la scarica di qualsivoglia elettrica batteria (*Nuove sperienze elettriche n.* 43, *e seg.*) non comparisce mai luce, se non in proporzione del moto, che s' induce tra le elettriche potenze, che sono previamente frenate a vicenda sulle opposte facce armate di quella batteria.

2. A rendere poi manifesta la necessità del moto delle elettriche potenze, acciò luce si ottenga fra i resistenti, niun genere di sperienze cade più in acconcio, quanto quelle, che brevemente descrissi nell' opera ora citata al capo ultimo *Della elettricità ne' fogli di carta bianca*. Gioverà qui combinarne su quel gusto alcune più convincenti.

(*a*) Prendo due sottili, ed eguali lastre di cristallo armate al solito da ambe le facce; e sovrapponendole in modo, che si adattino egualmente e le lastre, e le interne armature l' una sull' altra, le carico in un sol atto presentandole, come se fossero una sola, al condottore elettrico. E così come sono caricate le separo l' una dall' altra, e le riunisco senza vederne la minima luce; purchè nel separarle, e nel riunirle non tocchi l' una, o l' altra delle loro armature, e per tal modo non rivolga esteriormente alcun moto tra le opposte elettricità, che a vicenda si frenano nelle opposte facce di

quelle resistenti lamine, e non hanno perciò tra l' una e l' altra sufficiente commercio di moto, quanto si richiede per renderne sensibile la luce.

(*b*) Frappongo alle stesse lastre ancor cariche due fogli di carta bianca; e finchè seguo a riunirle, e a separarle in guisa, che non s' introduca notabile moto tra le opposte loro elettricità, non apparisce in tali atti veruna luce.

(*c*) Che se mentre sono riunite con fogli di carta bianca frapposti io tocco o l' una, o l' altra, o ambedue in un sol tempo le opposte armature, come in tal atto sento colla scossa, e vedo nella scintilla l'esterior impressione del moto delle opposte elettricità, così nella successiva separazione d' una lastra dai frapposti fogli appariscono segni di luce corrispondenti all' interiore moto, che in tal atto succede tra le opposte potenze; e seguono simili segni nella separazione del superiore foglio dall' inferiore, e poi di questo dall' ultima lastra.

(*d*) Spoglio quelle lastre di cristallo d' ogni armatura, e frappongo più fogli di carta bianca tanto larghi, quanto sono le intere lastre, e le cuopro esteriormente di fogli eguali. Indi o si ecciti collo strofinamento assai viva elettricità tra quelle lastre, e que' fogli, ovvero si carichino tutti insieme alla macchina con applicare al solito esteriormente due opposte armature, abbiamo in seguito nella separazione di ciascun foglio, e di ciascuna lamina manifeste striscie di luce ne' successivi lembi, o limiti, che si separano in proporzione del moto, che in tal atto s' induce fra le opposte elettricità delle facce, che previamente sono a contatto.

(*e*) Cercai se quel moto semplicemente, e direttamente si compia attraverso il mezzo resistente fra le opposte potenze previamente esistenti in quelle vicine facce, che si separano, e perciò il mezzo frapposto non faccia altro officio, che di meccanico impedimento; ovvero se ciascuna di quelle potenze essendo posta per tale separazione piuttosto in necessità di azione coll' aria, che in moto coll' opposta, per tale nuova azione smuova nella vicina faccia dell' aria altre elettricità, le quali nel riunirsi insieme alle prime raddoppino quel moto come si raddoppiano le azioni. Imperciocchè (dissi meco stesso) stando quelle facce a contatto non è se non semplice, e immediata l' azione dell' una coll' opposta potenza, d' on-

de ne nafce la coefione. Effendo quefta vinta per la forza con cui fi diftruggono, e fi feparano quelle facce refiftenti, non acquiftano perciò le contrarie potenze maggiore facilità di moto, fe non nel cafo, che fi frapponeffe un condottore; ma frapponendofi un mezzo refiftente, come l'aria, non altro accade, fe non che ciafcuna fulla vicina faccia dell' aria efercita l' azione fteffa, che full' oppofta efercitava. Ora con quefta raddoppiata azione fi fmove nelle oppofte facce dello ftrato d'aria la nativa elettricità con doppia direzione, l'una fra le due fpecie rifpettivamente oppofte verfo le vicine facce feparate, l' altra fra le due fimilmente oppofte, che indirettamente reftano libere, e s' incontrano nell' interiore groffezza dell' aria frappofta. Mi parve adunque, che in quefto doppio sforzo diretto, e indiretto delle contrarie potenze doveffe prefentarfi tale groffezza del frappofto mezzo, per cui veniffero effe determinate al moto di riunione; e ciò maffimamente, perchè il mezzo fteffo paffa fucceffivamente per tutte le mifure di groffezza, e per la fomma fua mobilità fi prefta a convertire que' moltiplici sforzi in vera azione di moto. E perciò conclufi ragionando, che non nel primo, ma nel fecondo modo, che da principio indicai, fi compiono que' moti, che a certi intervalli di tale feparazione fanno le ftrifcie luminofe.

(*f*) Nè dal raziocinio fembrommi difcorde l' offervazione, e l'efperienza. 1. Se nafceffe tal luce per femplice, e diretto moto delle oppofte potenze, nell' aria più fecca, che a tal moto maggiormente refifte, dovrebbe apparir meno luce, che nell'aria umida, che è meno refiftente: eppure fi offerva tutto l' oppofto. 2. Nell' aria fecca, per cui fi fa più viva luce, dovrebbero indebolirfi tanto più le oppofte elettricità che fi fuppongono fole, e direttamente riunite per rifplendere; al contrario nell' aria umida quanto meno vi è luce, tanto dovrebbero trovarfi meno indebolite. Il che nuovamente è contrario all' offervazione, effendo incredibilmente più vivi, e infieme più durevoli que' fenomeni nell' aria fecca, che nell' umida. 3. E quanto è più viva la luce, non folo tanto maggiormente, e più prefto dovrebbero indebolirfi quelle contrarie potenze; ma nell' aria fteffa più fecca dovrebbero eftendere a minori diftanze l' azione loro laterale, e lafciar nell' aria minori refidui di elettricità. Poichè quanto più di-

rettamente si unissero, tanto meno potrebbero agire lateralmente, e tanto minor porzione non unita rimarrebbe nell'aria. Ora in tali esperienze e i laterali effetti, e le residue elettricità divise, e sparse per l'aria sono senza paragone maggiori nella secca, che nell'umida. E ciò basti per ora, mentre ci occorrerà di parlarne alquanto più estesamente nella Legge sesta qui appresso.

(*g*) Comunque però immediato sia, o indiretto siffatto moto non nasce certamente quella luce, se non pel moto stesso, e per mutua unione delle opposte elettricità ne' limiti di separazione di que' fogli. E di ciò ne abbiamo manifesto incontro nella riunione de' medesimi; poichè presentati nuovamente ad uno ad uno fra loro, o alle stesse lastre in proporzione, che si rinnova il moto, o la mutua unione fra le residue opposte potenze rendono manifesta luce nei successivi limiti di riunione; ma non si attraggono, nè si comprimono l'uno sull' altro, se non tanto meno, quanto minore è il residuo delle opposte elettricità, che in tal atto non passano a riunirsi.

(*h*) E se fra quelle facce finitime non si rinnovi il moto delle contrarie potenze (poichè esse come da principio osservai (*a. b.*) a vicenda si frenano fralle opposte facce di ciascun foglio, e di ciascuna lastra, e perciò non possono far moto esteriormente) come non si eccita se non tenue attrazione, così niuna luce fra quelle si manifesta.

(*i*) Or mentre que' fogli, e quelle lastre stanno così finitime, e sovrapposte con niuna, o con tenue adesione, se con nuovo stroffinamento, o col contatto delle opposte armature, io rinnovo, o rivolgo esteriormente fra le vicine loro facce alcun moto di contrarie potenze, siccome più sopra accennai (*c*), si spianano e si stringono in quell'atto l'une sulle altre, ed in proporzione del moto stesso si rinnovano nella loro separazione, o accostamento quelle striscie, o lembi luminosi.

3. Per dimostrare in fine, che tra i condottori e i resistenti luce non nasce altrimente se non per moto, o mutua unione delle elettriche potenze, sono nati fatti que' molti esperimenti, che narrai ne' *Dubbj, e pensieri sulla teoria degli elettrici fenomeni* cominciando dal numero 127, e seguenti. Poichè in tutti i casi, nei quali fra lo scudo e la sottoposta faccia

faccia di criſtallo s' introduce colla ſeparazione, o coll' accoſtamento, o col contatto, o collo ſtroffinamento alcun notabile moto delle elettricità, ſi manifeſta in eſſi proporzionata luce. E niuna ſe ne manifeſta giammai ſenza tale modo, che il freno ſciolga, e il moto determini delle elettriche potenze.

Legge terza. Nè tal moto, che per l' elettrica luce è neceſſario, ha luogo mai altrimenti ſe non fra le oppoſte potenze, o contrarie ſpecie di elettricità.

1. Benchè ſembri queſta un immediato corollario delle precedenti, meglio però ſia dichiararla con dirette ſperienze. E primieramente coll' apparato deſcritto nell' opera in ultimo luogo citata al numero 127, come luce ſi oſſerva ogni volta che s' introduce moto fra le contrarie potenze, o ciò ſi faccia colla ſeparazione, o colla reſtituzione, o col contatto dello ſcudo ſul criſtallo; così niuna luce appariſce qualunque volta ſi ſepara lo ſcudo, o ſi reſtituiſce ſull' elettrico criſtallo, quando quello è ſpogliato di elettricità (*ivi n.* 133. 138.), e quando non è fornito, che di omologa alla ſottopoſta faccia del criſtallo (*ivi n.* 121. 136.), finchè in ſomma niun moto ha luogo tra le contrarie potenze.

2. E qui con maggiore diſtinzione ripiglierò quell' eſperimento, che ivi in fine ſemplicemente come un paradoſſo accennai (*ivi n.* 168.). L' eſperimento è queſto. Sta ſul diſco di criſtallo uno ſcudo, che nel ſepararlo diſpiega la virtù contraria a quella del diſco. Se prima di ſepararlo io ſcarico ſullo ſteſſo una, o più bocce aſſai cariche, e per tal modo accreſco altamente la forza eſplodente di quel diſco, quattro fenomeni in propoſito noſtro appariſcono principalmente degni di oſſervazione. 1. Lo ſcudo ſteſſo ſtando a ſuo luogo moſtra eſteriormente elettricità omologa alla faccia ſteſſa del diſco; 2. ed omologa ſegue a dimoſtrarla anche dopo che da queſta viene ſeparato; 3. ma tanta è l' adeſione tra il diſco e lo ſcudo, che per ſepararlo vi vuole forza tripla, o quadrupla, che non ne' caſi precedenti; 4. nè ſi fa mai quella prima ſeparazione ſenza forte ſtridore, e viva luce di ſcintille tra lo ſcudo e il diſco, da cui ſi ſtacca.

3. L' analiſi di ſimile eſperimento avrà luogo in altre Memorie, e ci guiderà a reconditi principj della teoria. Sembra in vero a prima viſta contrario alla ſteſſa legge, che ora

dichiariamo dell' elettrica luce. Poichè se nello scudo e prima, e dopo la separazione, altro non risiede, che elettricità omologa alla vicina faccia del disco; d' onde mai nella separazione nascono quelle stridenti scintille per opera delle contrarie potenze, che a tal uopo si esigono? Ma per poco che si rifletta anzichè contrario si troverà più che altro mai conforme alla stabilita legge. Nasce in questo, come in ogni altro complesso di fenomeni, la contraddizione, e il paradosso dalla incapacità di ben comprenderli, o dalla imperfetta, e tronca forma di esprimerli, non mai dall' ingenuo linguaggio della natura.

4. Per verità se nella separazione dello scudo l' ultimo fenomeno di luce e di scintille non si riferisca che al primo, e secondo di omologa elettricità, nasce il paradosso; ma svanisce tosto che si fa ragione al terzo fenomeno, e tutto si comprende l' esperimento nella sua integrità. D' onde tanta adesione, se non per mutua efficacia delle opposte potenze? Se dunque tali e tante sono nel disco, e nello scudo, quanto più forti si mostrano colla maggior resistenza nel separarli; perchè col moto delle stesse, che in tal atto si determina, non faranno luce, e strepito corrispondente?

5. Essendo adunque che coll' esteriore comparsa di virtù omologa a quella del disco, ciò non ostante acquista lo scudo con esso maggior adesione, non v' ha dubbio, che nello scudo stesso non ve n' abbia tanta copia di contraria, quanta necessariamente per la stessa adesione si richiede. Proverò altrove con ogni genere di sperienze, che sempre e per necessità l' una insieme all' altra s' incontrano le contrarie elettricità non solo nelle opposte facce degli strati, o lamine resistenti, ma in ciascuna faccia di qualsivoglia corpo resistente, o condottore; che ove non ha luogo tale simultaneo incontro, ivi non ha luogo nè lo sviluppo, nè la raccolta, nè verun segno di elettricità; che qualsivoglia elettrico segno non è se non l' immediato effetto di tale simultanea presenza, ed incontro delle opposte potenze. Ma siccome siffatte induzioni ai generali principj appartengono della teoria, perciò riservandole per altre Memorie, mi restringerò qui a considerarne soltanto i modi, e le circostanze, che l' elettrica luce immediatamente riguardano.

Distinsi sul bel principio (*legg.* 1. *n.* 1.) due modi nel moto delle elettriche potenze , che luce producono. Or que' due modi vogliono più intimamente considerarsi, e ridursi a più esatta espressione. Due sono realmente, e diversi fra loro i modi , e gli atti , che il moto fanno di separazione , o di riunione delle elettriche potenze, un solo però è il moto che in que' diversi modi eccita l' elettrica luce . Non è il moto di separazione diverso dal moto di riunione, anzi non è quella che la riunione stessa d' una parte di quelle potenze nell' atto che si sciolgono, e si dividono.

6. Imperciocchè niuna specie può sussistere senza certa, e determinata azione, ossia senza l'esercizio della propria forza. Or questa finchè immediatamente si esercita con proporzionata dose di contraria specie, non dà, nè può altrimenti dare esteriori indizj di azione nè su i sensi nostri, nè su i corpi ambienti; essendo che quella interiore , ed immediata loro azione non ha altro rapporto nè coi sensi nostri, nè coi corpi ambienti , se non in ragione delle differenze , che tra quell' interiore conflitto, e mutua collisione direttamente, o indirettamente s' introducono. Acciò esteriormente si manifesti, un atto vi vuole, che alteri l'opposizione, o l'eguaglianza di quelle forze, e ne scomponga così quell' immediata unione; ed in tal atto consiste il primo eccitamento dell' elettrica virtù; del quale non è questo il luogo di far altre parole.

Dirò soltanto , che a scomporre quella previa , e naturale unione (dico *naturale* per esser quella, da cui comincia, e in cui finisce naturalmente ogni fenomeno di elettricità) d'uopo è di concepire un corpo, o il concorso di più corpi, o di più moti insieme , che una di quelle forze traggan fuori dall'altra con eccesso, e predominio di azione. E quest' eccesso , e predominio con una di quelle specie sopra l' opposta o è costante , ovvero non è che passaggero , e momentaneo . Nel primo caso entrerà la specie stessa in nuova composizione con que' corpi, d'onde tale eccesso proviene, e indurrà in essi mutazione corrispondente al nuovo acquisto, o modo di unione. Nel secondo sarà quella specie pronta a trapassare in altri corpi, che per poco superino quel primo eccesso; ovvero scemando in que' primi in qualsivoglia modo quel complesso , d'onde tale eccesso nacque, resterà per naturale virtù la specie

ſteſſa pronta, e ſpinta a riunirſi colla ſua prima oppoſta, e ſarà perciò ſino al compimento di tale unione capace di dar ſegni, e prove eſteriori della ſua forza.

7. Nè deve traſcurarſi frattanto, nè porſi in dimenticanza l' oppoſta ſpecie, da cui fu ſeparata, e tratta fuori la prima. Poichè quella diſpiega in tal atto eſteriormente tutta l' energia delle proprie forze, e ne fa prova o con altri corpi, come nel caſo precedente, o immediatamente con altra elettricità preeſiſtente nella naturale ſua quiete, e unione, colla quale s' incontra. Non ſarebbe al certo quella capace di ſciorre la naturale unione di queſta, ſe l' incontro loro non foſſe, che in eguaglianza di particelle, o di maſſe le une ſciolte, le altre fiſſe, ed unite. Ma vi è la differenza, che continuando gli atti del primo eccitamento, le particelle, o maſſe, che indi ſono ſciolte, creſcono inceſſantemente con progreſſione a quegli atti proporzionata, e in oltre acquiſtano momento per la figura de' condottori; e perciò inveſtono, e attaccano da ogni parte in un ſol tempo ad una ad una le quiete particelle, e non poſſono far meno di non ſmoverle, e ſepararle. Ed in ciò conſiſte il giuoco di continuo ſmovimento, e ſoluzione di nuova elettricità, che ſuccede ad ogni atto del primo eccitamento, e che proſegue, e creſce, o ſcema in proporzione, che quello continua, e prende vigore, o ſi rallenta.

8. Abbiamo dunque in ogni atto, o eccitamento di elettricità due ſerie, o vie d'azioni; la prima diretta, come nel numero 6 ſpiegai; indiretta l' altra, ſiccome diſſi in ultimo luogo. E ciaſcuna di queſte ſerie diretta, o indiretta, immediata, o mediata preſenta due oppoſti andamenti, uno di aumento colla ſucceſſiva, e continua ſoluzione di quelle ſpecie, che coſtituiſcono per tal via l' intenſità dell' elettrica potenza; l' altro di decremento colla riduzione delle ſpezie ſteſſe a mutua riunione, la quale coſtituiſce il degradamento de' ſegni, oſſia le reſiſtenze, che ad ogni ſpecie di elettrica potenza ſi oppongono. Talchè ſiccome non creſcono i ſegni, ſe non per l' eceſſo di elettrica virtù, che ſi eſterna; così non decreſcono ſe non pel ſucceſſivo ritorno della virtù ſteſſa alla interiore direzione: e in ſomma come l' intenſità di que' ſegni riſulta dagli eceſſi di una ſola ſpecie, che rimane ſciolta, e forzata di

accumularſi inſieme; così la degradazione, e le reſiſtenze, che ſi oppongono a quella intenſità, non dipendono, ſe non dalla oppoſta ſpecie, che ſimilmente ſciolta, e forzata di accumularſi reſtituiſce gradatamente, e compie in fine la priſtina loro riunione.

9. E riſtringendo queſte conſiderazioni all' elettrica luce, dico, che qualſivoglia azione, o moto tanto della prima ſola, come dell' oppoſta ſpecie di elettricità colle parti di qualſivoglia genere de' corpi ſi riconoſce affatto inetto a dar ſegni di luce; nè queſta ha luogo altrimenti, ſe non pel moto di riunione d' una ſpecie colla ſua oppoſta, comunque poi ſi faccia tal riunione o per la prima diretta, o per la ſeconda indiretta via, che più ſopra ho diviſato. Onde non v' ha luce altrimenti, finchè la prima ſcorre nella paſſeggera unione de' condottori, e finchè la ſeconda non è in tale eccesſo da ſmoverne altra, e indi trarre a sè la contraria; e finchè per fine non ſi riducono all' atto di vicendevole riunione le parti della prima con altre della ſeconda: nel che conſiſte l' unità del moto, che più ſopra accennai (*n.* 5.) in mezzo alla varietà dei modi, e delle vie che al moto ſteſſo diſpongono, o conducono.

Legge Quarta. E le contrarie potenze, che nella riunione loro fanno l' elettrica luce, riſiedono ſenza luce inſieme non meno ne' condottori, che ne' reſiſtenti; e ſecondo varj rapporti or tutte, ora in parte ſoltanto ſi frenano, o ſi determinano al moto di riunione.

1. In principio a ſiffatto moto ſi oppone e la paſſeggera unione d' una ſpecie con altri corpi, e la tenue quantità dell' oppoſta, che non è capace di vincere con prevalente forza la naturale unione delle due ſpecie ſparſe ne' corpi ambienti: come per oppoſto a ſiffatto moto di riunione conduce tutto ciò, che o libera la prima da quella paſſeggera unione, o accreſce la ſomma della ſeconda; e rende così e l' una, e l' altra capace di ſmoverne intorno a sè, ed unirſi riſpettivamente all' oppoſta; ovvero di riunirſi a parte a parte direttamente fra loro.

Ma in progreſſo a queſti unicamente non ſi riſtringono i modi, che o ſi oppongono, o riconducono a quel moto di elettrica luce. Ben diverſi, e molti ſono altri modi che fre-

nano le elettriche potenze, comunque accresciute, e le ritengono in mero sforzo, e pressione; e molti che per opposto le rendono capaci di moto, e di riunione, siccome altrove dirò più opportunamente.

2. Or come non vi è luce, nè altro segno di elettricità, quando immediatamente riposano nella nativa loro unione le opposte specie (*legg. 3. n. 6. in principio*); così quando le specie stesse comunque divise si frenano a vicenda per frapposti ostacoli, e non esercitano le forze loro se non in continuo sforzo, o pressione, possono bensì far moti, e adesione fra i corpi, che le ritengono, e le dividono, ma non fanno mai luce, se non in proporzione dell' effettivo loro moto, e riunione. E qui più che in altre considerazioni è indispensabile non ordinaria distinzione d' idee, e sagacità d' intelletto per ben discernere i varj rapporti delle potenze, che si frenano, e degli ostacoli, che le riducono a semplice pressione; e per riconoscere in oltre secondo que' rapporti le parti, che or solitarie, ora insieme, or con lenta, or con rapida successione passano a riunirsi. Sono adunque in più modi intralciate, e miste insieme le opposte elettricità, ora saturate a parte a parte in ciascuna particella, e si dicono *spente*, nè danno perciò verun segno; ora con tendenza mutua, o *pressione*, e fanno insensibile unione fra le loro particelle, onde non inducono sensibile luce, ma soltanto manifestano sensibili moti, e adesione; ora per fine s' incontrano con notabile moto di riunione, e fanno luce, e scoppio; ed è ciò appunto, che al presente stiamo dichiarando.

3. In fatti nell' esperimento, che nella precedente legge narrai (*n.* 2.), si manifestano per sè stesse evidentemente tre porzioni distinte, ossia tre diversi rapporti di vicendevole freno, e pressione. Il primo fra lo scudo e l' aria ambiente. Il secondo tra lo scudo e la vicina faccia del disco. Il terzo tra le opposte facce del disco. Quanto al primo fra la potenza dello scudo e dell' aria ambiente si manifesta nello scudo stesso e prima, e dopo della sua separazione con moti, che dimostrano la sua specie omologa alla vicina faccia del disco, e si conserva in esso finchè non sia spenta. Si spegne questa con presentare un condottore immerso nell' aria ambiente allo scudo; poichè fra questi per la condottrice loro na-

tura si muovono per ogni verso quelle opposte potenze, e perciò giunti a certa distanza ne facilitano il moto, e ne compiono la riunione con proporzionata luce, e scintilla.

4. Segue il secondo rapporto tra l' altra porzione di elettricità dello scudo opposta a quella della vicina faccia del disco; le quali porzioni finchè si frenano fanno l' adesione, e colla separazione del disco si pongono in moto, e ne danno corrispondenti segni di scintilla, e di luce (*legg.* 3. *n.* 4. 5). Ma per intendere e come si frenino finchè lo scudo è a contatto col disco, e come si pongano in moto, quando lo scudo vien rimosso a certa distanza, si rifletta, che nel primo caso ciascun punto della faccia del disco immediatamente agisce contro il sovrapposto punto dello scudo, e perciò l' azione di questo restando così divisa, e diffusa egualmente non fa notabile, nè prevalente moto contro l' uno o l' altro de' sottoposti punti, benchè sieno dotati di contraria elettricità. Rimovendosi poi dal contatto lo scudo, due mutazioni accadono nella sua elettricità, le quali debbono qui partitamente esaminarsi. Le mutazioni sono queste. 1. L' elettricità omologa di ciascun punto nella faccia dello scudo diventa col rimoversi di questo più vicina fra di sè, che non colla contraria de' sottoposti punti del disco; 2. la faccia stessa in tale separazione non resta più necessariamente piana, e parallela sulla faccia del disco, ma presenta, o prende qualche inclinazione, o prominenza più verso una, o alcune, che verso le altre parti.

5. E in primo luogo nel rimoversi lo scudo ciascun punto dell' inferiore sua faccia ritiene la primiera sua posizione, e vicinanza per rapporto alla sua specie di elettricità, ma quanto più si rimove, tanto più ciascuno di que' punti si allontana dai corrispondenti della faccia del disco, ne' quali risiede la contraria. Quindi tanto questi della faccia del disco, quanto quelli dello scudo non esercitano più gli uni cogli opposti immediatamente la loro azione, ma bensì per mezzo dell' aria, che fra loro subentra. Frattanto però ritenendo la relativa loro posizione per rapporto alle specie di elettricità, che in ciascuna faccia risiedono, rimane l' azione di quelle nella sua integrità; e perciò quanto più lo scudo si scosta dalla faccia del disco, tanto meno l' una coll' altra si frenano quel-

le opposte potenze, e tanto maggior vigore ciascuna prende per sè stessa, e lo esercita contro l' aria frapposta, e contro i corpi in essa immersi.

6. E benchè ciò si riconosca apertamente dagli elettrici moti, che in simile apparato altrove descrissi (*loc. cit. n.* 161. 162.), mi piace di confermarlo direttamente con fenomeni di elettrica luce. Dopo che si è spenta nello scudo la omologa virtù coll' opportuno accostamento d' un condottore (*n.* 3.), stacco lo scudo dal disco, ma con tale avvertenza, che si scosti egualmente dalla sua faccia appena una linea; e fermandolo in tale posizione, la prima volta che accosto il dito per toccarlo ne ho una scintilla tenue di luce, ma stridente, e pungente; e comunque segua poi a toccarlo, finchè si mantiene a quella distanza non riporto più mai altro senso di luce, nè di scintilla. Che se alzo prontamente di più lo scudo dalla distanza di una linea fino ai quattro o sei pollici, al primo accostamento del dito ne riporto una nuova scintilla più lucida, e meno pungente della prima. Se in un sol atto inalzo da principio lo scudo a quest' altezza, ne riporto col dito una scintilla equivalente per sè sola alle due, nelle quali col precedente modo fu divisa.

Nel che è manifesto, che le opposte potenze fra lo scudo e la vicina faccia del disco, siccome interamente si frenano col mutuo contatto, così proseguono a frenarsi in parte a certa distanza; e in fine tanto meglio per sè stesse si dispiegano, quanto l' una dall' altra si allontana.

7. Passa ciò non ostante tra lo scudo e il disco la differenza, che in quello come condottore ha facile moto per ogni verso l' elettricità della sua faccia; il che per opposto non accade nella faccia del disco per essere di resistente natura. Quindi è, che combinandosi questa differenza colla seconda mutazione, che nella separazione accade (*n.* 4.), e consiste in qualsivoglia inclinazione, o prominenza della faccia dello scudo verso la sottoposta faccia del disco, per questa via si toglie l' eguaglianza delle distanze, e del vicendevole freno fra ciascun punto di contraria potenza nelle opposte facce; e perciò quella elettrica forza, che per ragione delle distanze e per la conducente natura dello scudo si trova in esso mobile, passa per quella inclinazione, o prominenza coll' eccesso

suo

ſuo a riunirſi con l' oppoſta ne' ſottopoſti punti dello ſcudo, e fa in tal atto luce, e ſcintilla.

8. Ciò che direttamente diciamo delle potenze dello ſcudo, e della ſottopoſta faccia del diſco, in ſimil modo s' intenda dello ſtrato d' aria frappoſto nella loro ſeparazione ſecondo le reciproche, e indirette azioni previamente dichiarate nella Legge ſeconda (*ivi n.* 2. *e. f.*). Nè fra queſte e quelle conſiderazioni paſſa altra differenza, ſe non che tutte ivi ſono di reſiſtente natura le facce ſeparate, mentre qui già oſſervammo eſſere lo ſcudo un condottore. Onde pel raddoppiamento, e l' interpoſizione del mezzo, che oltre alle corriſpondenti differenze di groſſezza, e di figura, e di varia capacità reſiſtente nelle ſue parti, introduce la mobilità ſomma delle medeſime, ne riſultano indi nuove combinazioni di moto fra le oppoſte potenze per far luce, e ſcintille.

9. Dipende il numero di tali ſcintille dal numero de' caſi, che nella ſeparazione introducono qualche eceſſo di forza fra le finitime potenze. La grandezza di ciaſcuna ſcintilla corriſponde alla quantità, e mobilità di quegli eceſſi di forze. Ed è in ſimili eceſſi da notarſi una reciproca proporzione colle reſiſtenze del mezzo frappoſto. Poichè quanto maggiore ſi fa la diſtanza fra le contrarie forze nelle facce del diſco, e dello ſcudo, tanto creſce la grandezza del frappoſto mezzo reſiſtente. Onde da queſta ſteſſa reciprocità naſcono altre varietà nel numero, e nella grandezza delle ſcintille; e in conformità di tali variazioni ſono nuovamente varj i reſidui di elettriche potenze, che ſi trovano nello ſcudo, e nel diſco ſeparati in fine a prima diſtanza.

10. Che ſe queſte colle oſſervazioni ſi confrontino eſpreſſe in fine della precedente Legge (*ivi n.* 6. 7. 8. 9.) comprendiamo univerſalmente il modo d' ogni luce, e ſcintilla, che dalla elettricità dipende. Poichè i condottori, che ad un corpo elettrico ſi preſentano, aſſomigliare ſi debbono allo ſcudo or appreſſato, or rimoſſo dalla faccia del diſco; e non altrimenti, che queſto le ſteſſe vicende ſubiſcono di elettricità omologa, e contraria; e ſimilmente ſecondo il diverſo loro ſtato d' iſolamento, diſtanza, e figura contraggono tale moto di contrarie elettricità, quale per l' elettrica luce ſi richiede. Troppo mi dipartirei dallo ſcopo preſente, ſe ciò imprendeſſi

a dimostrare più estesamente, che avrà luogo nell' analisi del premesso esperimento.

11. Ma per compiere al proposito nostro que' rapporti, che nell'esperimento stesso da principio accennai (*n.* 3.) non rimane che l' ultimo rapporto fra l' elettricità delle opposte facce del disco. Fra le quali s' introduce moto coll' arco, o con altra somigliante via, che dall' una all'altra armatura si applichi, o si frapponga. L'arco però è sopra ogni altro modo attissimo per la sua figura a dar cominciamento al moto di vicendevole unione, ed a continuarlo con tale rapidità, che si manifesta colla scintilla, e collo scoppio.

12. Si distinguono evidentemente l' uno dall' altro questi tre rapporti, e partizioni di elettricità non meno nel precedente esperimento, che in ogni altra maniera di elettrica luce, purchè in debita figura, e distanze, e isolamento si presentino i corpi, e si esplorino le loro vicende con ordine conveniente. Poichè qui per esempio, se cominciate dal terzo rapporto, confondete con questo insieme il primo, e non distinguete più, se non il secondo. Se incominciate dal secondo, confondete questo col primo, e indebolite frattanto ad ogni atto vie più anche il terzo. Al contrario riconosciuta la prima porzione nello scudo posto a suo luogo, e spenta questa col contatto, passate colla separazione a riconoscere la seconda; indi riposto lo scudo, e appressando allo stesso l' arco procedente dall' opposta faccia, riconoscete la terza porzione, ed in tal atto rinnovate il secondo rapporto nelle successive separazioni.

13. A rendere in fine sensibile con facilità, e costanza l' elettrica luce due circostanze principalmente concorrono, e sono 1. certa quantità di elettriche potenze, 2. e certo intervallo fra l' una e l' altra. E' necessaria la distanza, o la divisione d' intervallo perchè l' una, e l' altra si ponga in libertà di moto, come più sopra spiegai (*n.* 1. 6. 7.); ed è necessaria del pari certa quantità, acciò coll' eccesso suo direttamente, o indirettamente quel moto determini, che ivi pure dichiarai (*n.* 8. 9.); ed è pur necessaria in fine tale grandezza d' intervalli, e di azioni, che faccia notabile impressione su i nostri sensi. Poichè le indicate circostanze nella facilità, e costanza loro a produrre l'elettrica luce soggiacciono

a molte vicende non meno per la grandezza, figura, e qualità de' corpi, che per le qualità del mezzo resistente, e per lo stato dei sensi, onde gioverà considerarle alquanto più distintamente nelle seguenti Leggi.

Legge Quinta. Nè in qualsivoglia moto di riunione delle contrarie potenze è visibile l' elettrica luce, se non fra certi intervalli, entro, e oltre de' quali il moto stesso si compie senza altro senso di luce.

1. Primieramente per le superficie de' condottori, come sono i tubi, gli archi, e simili, si riuniscono le contrarie elettricità senza verun senso di luce, benchè tali superficie abbiano innumerabili pori, che altro non sono, se non tenui intervalli, che ne interrompono la continuità. Si caricano per via di tubi, o archi, che siano a contatto con le alterne armature, più bocce, o quadri successivi, e si scaricano similmente senza luce, ove non s' incontrino le opposte elettricità a certe distanze fra l' una e l' altra estremità, o finitima superficie di que' condottori, e delle armature.

2. E per dimostrare, che tanto nelle superficie de' condottori, come nelle armature de' quadri si fa tal moto di riunione, il quale non rende sensibile impressione di luce per la indicata tenuità de' loro pori, o intervalli, abbiamo in pronto alcuni facili artifizj per rendere quegl' intervalli gradatamente capaci di porre in vista la luce delle contrarie potenze, che ne' medesimi si riuniscono. Sostituite al tubo, o all' arco di unita superficie una catena di sottil filo metallico, la quale non sia punto tesa, e faccia perciò intorno al tenue contatto de' suoi anelli ogni varietà d' intervalli successivamente maggiori; ed osserverete tra l' uno e l' altro anello in certa grandezza di quegli intervalli manifesta luce. Applicate dopo ciò successivamente alcuni pesi a quella catena, i quali rendendola grado grado più tesa accrescano il contatto de' suoi anelli, e scemino il numero, e la grandezza di que' primi intervalli, e vedrete nella proporzione stessa scemarsi, e in fine sparire que' punti luminosi, che tra essi brillavano.

3. Se poi vi piaccia più vago, e grande spettacolo di lucidi punti, in luogo della foglia di stagno, di cui si fa l' ordinaria armatura de' quadri, sostituite nella faccia superiore uno strato uniforme, e molto raro di limatura metallica, tal-

chè vi formi tra que' briccioli un tessuto d'intervalli di ogni grandezza; e nell' atto che si scarica il quadro in moltissimi intervalli di tutta quella faccia comparirà viva luce di riunione. In una fascia della faccia stessa accrescete lo strato di limatura, sicchè non lasci se non pochi, e tenuissimi intervalli; e resterà per la tenuità loro quella sola fascia priva di luce. Rarefate in un' altra fascia assai più quella limatura, sicchè tra que' briccioli non restino, che intervalli vie più grandi de' primi; e vedrete in questa fascia stessa scemare, e mancar in fine ogni luce per soverchia grandezza di quegli intervalli.

4. Che se in fine l'intera faccia si cuopre di tanta limatura, che equivalga nella tenuità de' suoi intervalli ad una ordinaria superficie metallica, si avrà per essa la piena scarica con tenuissima, o niuna luce. Che se all' opposto nell' intera faccia si renda rarissima quella limatura, ogni volta che si tenta di aver la scarica, non si avrà se non in parte; ma a questa parte non corrisponderà giammai altrettanta luce per essere quegli intervalli di soverchio grandi per non renderla abbastanza sensibile.

5. Nè ci mancano dirette sperienze per confermare quest' ultimo assunto, cioè, che oltre certa misura d'intervalli si compie ne' medesimi senza notabile senso di luce la riunione delle contrarie potenze. Qualunque volta tentiate di cavar la scarica tra le opposte facce d'una boccia, o d'un quadro carico, presentando lentamente l'estremità dell' arco a certa distanza suori dei limiti dello scoppio, s' indebolisce ad ogni atto la forza della carica; nè per tale indebolimento, che pur si fa colla riunione d'una parte delle contrarie potenze, apparisce verun indizio di luce, purchè tra l'estremità dell' arco e l' armatura resti certa distanza conveniente alla residua forza di carica; talchè con simili atti con qualche pratica replicati resterà in fine esaurita l'intera carica senza aver dato senso di luce. Ma in tutte le distanze alquanto minori cominciano tra l' arco e l' armatura a comparire ad ogni atto soffj, e sprizzi di luce, i quali poi a distanze ancor minori scoppiano in fine in piena scintilla.

6. Che se queste, e somiglianti sperienze per se stesse la necessità dimostrano di certa grandezza d'intervalli, perchè il moto delle elettriche potenze si manifesti con fenomeni di

luce; se poi si compongano colle osservazioni premesse nella Legge quarta (*ivi n.* 5. 6. 7. 8. 9.) ci fanno universalmente conoscere con qual legge in que' diversi intervalli il moto stesso si determina fra le opposte potenze, che previamente si frenano a vicenda con mutua tendenza, e pressione. Imperciocchè siccome la *pressione* sussiste, finchè tutti i punti d' una specie sono più vicini ad altrettanti della specie opposta, che non sono molti insieme d' una specie stessa vicini fra loro; così la pressione si cangia in *moto* tostochè per qualsivoglia causa o di mutate distanze, o di mutate figure molti insieme i punti d' una specie sono più vicini fra loro, che non con altrettanti dell' opposta specie: onde ne risulta l' eccesso, e preponderanza di forze libere da ostacoli, e per conseguenza il moto.

7. E fra le indicate differenze richiamiamo qui distintamente quella fra i condottori e i resistenti; per cui in quelli ciascun punto, che per mutate distanze resta libero dalla contraria potenza, può per la condottrice sostanza muoversi in ogni verso insieme agli altri punti simili, e liberi egualmente; ne' resistenti al contrario, benchè ciascun punto resti libero dalla contraria potenza, non ha perciò libertà di moto insieme agli altri per la resistente natura della sostanza, in cui risiedono, la quale è incapace di condurli, e di raccoglierne insieme l' azione. Quindi niuno v' è, che non intenda, come si abbia più viva e forte luce dai condottori, che dai resistenti non armati; e come per la stessa ragione in quelli tanto più presto, che in questi, si estingua la facoltà di dar luce, mentre ne' primi in un sol atto si compie ciò che ne' secondi non si esaurisce talvolta neppur con sei, nè con dieci.

8. E per la differenza medesima tra le particelle di qualsivoglia resistente sia fluido, o solido, e tra le facce di resistenti diversi a tenuissime distanze restano frenate le contrarie potenze, essendo queste così divise, e separate per la natura stessa di quelle sostanze in minimi punti quasi solitarj, e incapaci di cospirare in un sol atto, o momento. All' opposto i condottori immersi in quelle fluide particelle, o applicati su quelle facce resistenti ne raccolgono intorno a sè le parti divise, e ne compongono i momenti di maggior azione. On-

de la preponderanza di momento, e perciò il moto tra quelle contrarie potenze procede d' ordinario, e si determina per la via de' condottori.

9. Ma per dedurre con qual legge progrediscono que' moti, e come si compiono or con niuno, or con tenue, or con vivido senso di luce, d' uopo è unire insieme varie considerazioni, 1. tanto della attività, e uso degli occhi, e dello stato di oscurità previa e presente in ogni particolare osservazione; 2. quanto della quantità stessa di elettricità, che in tal atto si pone in moto; 3. e in fine della qualità, e resistenza de' mezzi frapposti. La prima considerazione sarebbe estranea al nostro proposito, appartenendo all' Ottica, e alla teoria della visione, onde basterà qui averla accennata, nulla potendosi aggiungere alle cautele già descritte da *Newton* per la solare, e da *Beccari* per la fosforica luce; e delle due ultime proseguiamo a dire nella seguente Legge.

Legge Sesta. E gl' intervalli di elettrica luce non dipendono infine, che dalla quantità delle contrarie potenze, che per quelli si muovono, e dalla qualità delle sostanze, che que' mezzi costituiscono.

1. Dal complesso d' ogni genere di sperienze, che ne' precedenti capi tentate abbiamo per rapporto agli intervalli di elettrica luce, risulta, che seguono essi certa diretta proporzione colla quantità delle elettriche potenze, che per que' medesimi intervalli prendono moto. Poichè siccome nelle serie di que' capi notai diligentemente le distanze corrispondenti alla grandezza delle cariche impresse; così del pari osservai, che colla grandezza stessa delle cariche progrediscono a maggiori intervalli le apparenze di luce, talchè come ne' più grandi intervalli si estendono con accrescere la somma, e la mobilità delle contrarie potenze, così ne' minimi si rende la luce stessa insensibile con diminuire la somma, e la mobilità delle medesime.

2. E quanto alla somma si riconosce essa, e si misura col numero de' giri elevato a certa potenza, e moltiplicato pel valore di ciascun giro. E la mobilità non meno dipende dalle specie loro, e dalla qualità, e forma de' corpi, ne' quali esse risiedono, che dalla qualità de' mezzi, pei quali si uniscono. Della specifica loro mobilità, e della forma de' corpi

oltre a ciò, che detto ne abbiamo ne' precedenti capi, diremo più opportunamente nell' articolo ſeguente rintracciando le particolari leggi di que' fenomeni. E circa la qualità dei mezzi ſi diſtinguono queſti comunemente in condottori, e reſiſtenti, e a tenore di ſimile partizione ſi ſtabiliſcono gli ultimi unicamente idonei a proccurar elettrica luce, e inetti que' primi. Simili concluſioni però non ſembrano dedotte che per illuſione di vocaboli, e per mal concepite ſperienze; aſſumendoſi troppo di leggeri, che non naſca elettrica luce, ſe non per denſità di un fluido cagionata dagli oſtacoli, o per attrito dello ſteſſo, o per altro ſomigliante giuoco contro le reſiſtenze.

3. Più ragionevole ſarebbe di ripeter tal luce dalla accenſione cauſata nell' unione delle contrarie potenze, ſecondo che più plauſibilmente a' noſtri tempi ſi ſpiegano ſimili apparenze lucide in ogni altro genere di combuſtione. Che così entrando l' elettrica luce nella propria, e più vera teoria della combuſtione, rimarrebbe ſincera ogni altra eſpreſſione di elettrica teoria, nè ſaremmo forzati di moltiplicare in queſta le contraddizioni, e gli errori cogli avanzi di antiche prevenzioni erronee dell' altra. E per tal modo conſiderando la mutua azione delle elettriche potenze tanto fra di loro, quanto colle parti de' corpi, ne' quali s' incontrano, ſiccome accennato abbiamo a ſuo luogo (*legg.* 2. *n.* 2. *legg.* 3. *n.* 6. 7.) non reſterebbe altra principale differenza tra i condottori e i reſiſtenti, ſe non che in quelli ſi fa la ſemplice, o diretta azione delle elettriche potenze già ſciolte, e diffuſe; in queſti ſi fa doppia per l' indiretto ſmovimento, e ſoluzione di ſimili potenze, che ne' medeſimi s' incontrano. Onde ne' primi non reſiſte, nè ſi oppone alla loro riunione, ſe non la paſſeggera, e parziale combinazione delle ſteſſe colle parti de' condottori; ne' ſecondi al contrario incontrandoſi l' elettriche potenze già ſciolte invece d' impiegare a vicenda le mutue forze ſi trovano forzate ciaſcuna dalla ſua parte a ſmoverne altre, colle quali non ſi riuniſcono ſe non per raddoppiamento di quella prima diretta azione.

4. Ed a queſto raddoppiamento ſi riduce la diſtinzione de' reſiſtenti da' condottori; e naſce indi in que' primi la difficoltà di porgere immediato, e diretto paſſaggio alle contrarie potenze,

nel che consiste la resistente natura, e la maggior somma, e rapidità di effetto, quando in fine tal passo si apre con simile raddoppiamento di azioni, e la capacità di raccogliere, e dividere nelle facce di lamine resistenti le cariche, siccome più distintamente vedremo nella Teoria delle elettriche scosse. Ne' condottori all'opposto vi è pure qualche grado di resistenza, ma per diversa ragione, che non tende, se non a scemare in parte la mutua diretta azione delle elettriche potenze, nè può mai accrescerla, o raccoglierla con partirne indirettamente gli effetti.

5. Quindi sussisterebbe la distinzione di gradi varj tanto ne' resistenti, come ne' condottori; ma nella varietà de' loro gradi procederebbero essi in serie contraria. Talchè la stessa dose di elettriche potenze darebbe tanto meno luce nel riunirsi fra la sostanza d'un condottore, quanto questo fosse condottor più eccellente; e per opposto luce tanto maggiore nel riunirsi tra la sostanza d'un resistente, quanto questo fosse nel più alto grado di resistente natura. Il che si troverà coerentissimo alle sperienze, quando in queste di proposito ci occuperemo.

6. Sarebbe poi in manifesta contraddizione coi fatti più insigni, e costanti, chi non conoscendo altro, che sperienze inadequate, e confuse persistesse tuttavia nell'errore che le elettriche potenze, quando pel mezzo de' condottori si riuniscono, non facciano in essi veruna luce. Risplende vivissima l'elettrica scintilla attraversando l'acqua, e il vapore, corpi condottori, come attraverso dell'olio, e dell'aria, che sono resistenti. E nel risplendere trasforma simili sostanze in altre sinora non osservate, nè conosciute. Nel vapore poi, e nell'aria, quando è ridotta a tale rarità, che incapace sia di frenare una carica nascente, si riuniscono le opposte potenze a grandi intervalli, ed empiono di luce tutta la capacità di grandi tubi, o globi di vetro, nei quali l'aria sia opportunamente rarefatta per prestarsi a quel facile raddoppiamento di azione, ed a questo si riducono i fenomeni di elettrica luce da *Canton*, e da *Wilson* descritti, i quali furono poi chiamati *atmosfere*, o *condottori luminosi*.

7. Ma ritornando ai condottori delle elettriche potenze con grandi scariche s'infuocano, e si fondono, e si disperdono in

in ſine con viviſſima luce i metallici fili, non altrimenti che i ſottili ſtrati di reſina, o di vetro. Conobbe *Prieſtley* con particolari cimenti, che maggior carica vi vuole ad inſuocare, e ſondere quel metallo, che è più condottore, come maggior ſorza vi vuole per rompere un ſottile ſtrato di vetro, che non un eguale di reſina. Onde accreſcendo con certa legge la ſomma delle ſorze, oſſia la carica reciprocamente colla condottrice ſacoltà de' metalli, e direttamente colla reſiſtente natura delle reſine, e de' vetri, avremo luce in tutti i gradi de' condottori del pari, che in tutti i gradi de' reſiſtenti pel moto delle contrarie potenze; e pel ſolo aumento di queſte ſi ragguaglieranno i ſenomeni di elettrica luce attraverſo quelle differenti ſoſtanze. E ſarà per tal modo la differenza loro ridotta a ſoli gradi, come la proporzione loro non conſiſte, che nel diverſo modo di reſiſtere.

8. Le elettriche potenze adunque e quando ſono tenui, e quando ſono grandiſſime, e quando ſciolte, e accumulate ſi trovano in condottrici ſoſtanze, e quando intralciate reſtano, e diviſe fra i punti, o ſtrati delle ſoſtanze reſiſtenti, non fanno luce giammai, finchè ſi frenano a vicenda o l' una coll' altra, o colle particelle di altre ſoſtanze. Naſce qui naturalmente la queſtione, *ſe riſplendano eſſe quando ſono ſolitarie, cioè l' una dall' altra diſtinte, e indipendenti?*

Prima di entrare in tale queſtione più, e più altre ſi ſuppongono previamente definite, e ſono:

(*a*) Se ſia la *luce* ſemplice effetto d' una ſola ſoſtanza, ovvero riſulti da mutua, e compoſta azione di più ſoſtanze.

(*b*) Se poſſa l' una, o l' altra *ſpecie* di elettricità ſuſſiſtere, o raccoglierſi diſtinta, e indipendente dall' altra, e quali ſieno i mezzi di ottenere ſiffatta ſeparazione.

(*c*) E quanto ai *mezzi condottori*, ſe non concorrano eſſi che paſſivamente con mera permeabilità meccanica, oſſia col preſtare libero paſſo pei loro pori.

(*d*) Se concorrano in oltre con mutua azione permanente, o momentanea.

(*e*) Se la loro preſenza, o figura, o azione concorra a modificare l' azione delle reſiſtenti particelle, o ſoſtanze frappoſte, o ambienti.

(*f*) E quanto ai *mezzi reſiſtenti*, ſe la loro influenza ſul-

la elettricità non ſia che di meccanica impermeabilità , oſſia di mero impedimento di trapaſſo.

(*g*) Se in oltre influiſcono con mutua azione.

(*h*) Se queſta ſi faccia colle particelle ſteſſe componenti di quelle reſiſtenti ſoſtanze , ovvero con altre per eſſe ſparſe .

(*i*) E per comporre tutte inſieme le conſiderazioni delle elettricità, e dei mezzi, ſe tal ſorta di azione ſi diſtingua dall' azione mutua colle condottrici ſoſtanze.

(*k*) Quali mutazioni naſcano e nelle condottrici, e nelle reſiſtenti ſoſtanze per ſimili azioni.

(*l*) Se le mutazioni ſteſſe non conſiſtano che in differenze de' gradi .

(*m*) Se queſti gradi ſieno principj di trasformazione, talchè ogni elettrica azione cominci a ſciorre, e ad alterare le ſoſtanze , colle quali ſi eſercita ; e perciò tali alterazioni accreſciute in fine riſolvano , e diſtruggano non meno le condottrici, che le reſiſtenti ſoſtanze. Onde non ſia l' eccitamento di elettricità, ſe non l' incominciamento di alterazione, e diſtruzione delle ſoſtanze, che a tal atto concorrono.

(*n*) Se tali riſoluzioni per elettrica virtù naſcano da maggiore, o da minore affinità colle prime parti riſolventi, cioè ſe più facile ſia la riſoluzione, e trasformazione delle reſiſtenti, o delle condottrici ſoſtanze.

(*o*) E per fine ſe, e come ciò concorra ad accreſcere, o a ſcemare, e ſpegnere gli eſteriori ſegni di elettricità.

9. Ad altre Memorie la diſcuſſione appartiene di tante queſtioni ; e ſi riducono in eſſe a preciſa eſpreſſione que' comuni termini troppo confuſi *di dare , e ricevere* ; *condurre, e reſiſtere* ; *condenſare, e rarefare* ; *frenare e muovere* ; *eccitare, e ſpegnere* ; *torre, e reſtituir l' equilibrio*. Nè previamente poſſiamo dir nulla in propoſito della queſtione da principio accennata. E perciò ritenendo la conſiderazione della elettrica luce, come un fenomeno , concludiamo dal compleſſo de' fatti eſpreſſi nelle precedenti leggi , che non ha eſſa luogo altrimenti, ſe non nell' atto, e pel moto, con cui l' una all' altra ſi riuniſcono le contrarie elettricità . Comunque poi diretto, o indiretto, ſemplice, o duplicato ſia quel moto nella varia natura , e forma de' mezzi , o intervalli frappoſti, non vi è altra differenza per rapporto alla loro quantità, cioè

quando ſono grandi, o raccolte, e quando ſono tenui, o intralciate, ſe non che nel primo caſo molte inſieme delle oppoſte particelle ſi rivolgono, e ſi muovono in fuori, o attraverſo le reſiſtenze, e gli oſtacoli, e perciò fanno vivo ſenſo di ſcintilla; nel ſecondo caſo per oppoſito non ſono capaci che di moto lento, e diviſo, il quale perciò ſi compie ſenza notabile impreſſione di ſcintilla, e di luce.

ARTICOLO II.

Leggi de' particolari fenomeni della elettrica luce.

NEl precedente articolo non incontrai veſtigio di altrui pedate; qui molte ſi preſentano, ma piuttoſto a ſalti, e a paſſi confuſi, che per traccia di previa direzione. Gioverà pertanto andar circoſpetto, e ſenza trattenerci di ſoverchio in qualche ſentieruolo più trito, e ſenza paventar l'acceſſo delle più ardue, ed inoſpite vie.

Legge Prima. Occorrono nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità apparenze di luce, che ſono varie in grandezza, figura, ſuono, e colore.

1. Oltre alle ſcintille, che ſcoppiano brillanti in pieno e tra gli elèttrici condottori, e tra i limiti delle elettriche ſcariche, ſi manifeſtano nelle tenebre con maggior diſtinzione le differenze di elettrica luce. Benchè tra quelle prime non manchino differenze d' ogni genere, ſiccome ne' precedenti Capi notai, e dovrò più diſtintamente notare nella terza Parte; ciò non oſtante le ultime ſole ſembrano proprie del preſente articolo sì perchè nelle tenebre più compiutamente ſi diſcernono i lucidi fenomeni, sì ancora perchè le ultime, e non le prime d' ordinario s' introducono come prove, e criterj delle oppoſte ſpecie di elettricità, e ſi producono per definirne la diverſa natura.

Cominciando adunque dal condottore di vitrea elettricità è certo, che ſulla metallica punta da eſſo procedente, a cui ſi preſenti a certa diſtanza altra sferica, o piana ſuperficie condottrice, comparifce nelle tenebre un faſcio di lucidi raggi 1. ampiamente divergenti in forma conica coll' apice alla

punta metallica, 2. inſtabili con vago ſtridore, o croſcio errante verſo l' eſteriore baſe, 3. di colore non candido, ma di varie tinte fra il giallo, roſſo, e violetto.

Al contrario ſulla metallica punta, che dal ſuolo ſi preſenta allo ſteſſo condottore, ſplende una luce 1. riſtretta di sferoidea figura, 2. coſtante nella ſua forma con un ſibilo, e quaſi ronzio continuo all' apice della punta ſteſſa, 3. di candido, vivo colore.

Quel primo faſcio ſi chiamò *pennello*; queſta ſeconda luce ſi diſſe *ſtelletta*.

2. Sarà quello adunque il criterio di vitrea; e queſta il criterio di reſinoſa elettricità? ed anche ciò ſuppoſto, ſarà il pennello ſufficiente prova di un fluido ſolo, che eſce; e la ſtelletta argomento dello ſteſſo fluido, che entra per quelle punte? Non laſcierebbe di eſſere un gran ſalto dalla prima alla ſeconda concluſione. Ma innanzi di miſurar la conneſſione di queſte illazioni, chiederò in ordine alla prima, ſe per fiſſare un criterio di ſpecie diverſe baſti un fatto iſolato comunque certo, e coſtante? ovvero ſe d' uopo ſia di accertare, ed eſtendere il fatto ſteſſo del pari coſtante in tutte le varietà di modi, e di circoſtanze? Poichè ſe ad un ſolo modo ſi riſtringe, ſarà criterio di quel modo, e non mai della ſpecie, nè degli altri modi. E dovrà perciò rintracciarſi tale criterio della ſpecie, che adequato ſia per iſpiegare non meno quel modo, che gli altri quanti ſono diverſi, e del pari certi, e coſtanti. Altrimenti a quante ſpecie non andiamo incontro, ſe per ciaſcun modo s' induce un criterio di ſpecie diverſa? Rintracciamo dunque le principali differenze de' modi prima d' ingolfarci ne' criterj, e nella ſpecie.

3. A quella punta, che dal condottore procede, altra ne preſento direttamente in diſtanza più di due piedi, e comincia a comparir in quella una ſtelletta; indi un tenue pennello non altrimenti, che quando ſi preſentano alla ſteſſa in minori diſtanze le sferiche, o piane ſuperficie. Ma appreſſando paſſo paſſo la punta preſentata direſte, che la ſtelletta di queſta divora l' oppoſto pennello. Poichè ſi contrae eſſo notabilmente, e preſto ſi riduce a non moſtrar di pennello altro veſtigio, che i colori. E la ſtelletta coll' avvicinarſi ingroſſa,

e toglie infine anche i colori a quell' *avanzo di pennello*, talchè si confondono l' una coll' altra le loro apparenze.

Abbiamo dunque sulla punta procedente da vitreo condottore per lungo tratto un tenue avanzo di pennello, ed in principio, e in fine la stelletta in tutto pari all' opposta.

4. Tolgo via ogni punta, nè altro pongo in opera, che globi di varie grandezze, e piane superficie. (*a*) Presento al globo grande terminante il condottore la piana armatura del quadro, come nella preparazione della serie 19. nè mai da esso, nè dall' opposta armatura apparisce pennello. (*b*) Sostituisco al più grande gli altri globi successivamente minori; e da questi parte un vero pennello contro l' opposta armatura. (*c*) Quanto il globo è minore segue a dar pennello, e ad imprimere carica nell' opposto quadro in distanza maggiore.

Non nasce pertanto il pennello dalle punte sole, ma anche dai globi terminanti il vitreo condottore. Soltanto dipende da certa grandezza de' globi, e da certe distanze dell' opposta superficie.

5. Collo stesso apparato ora scemo, ora accresco la dose, ossia quantità di eccitamento a ciascun giro del disco. (*a*) Scemando cessa in fine il pennello anche ne' globi più piccioli; (*b*) accrescendo comparisce il pennello ne' globi successivamente più grandi; (*c*) e lo stesso ne' più piccoli sussiste anche rimosso il quadro a distanze tanto maggiori.

Onde il pennello ne' globi procedenti dal vitreo condottore non solo da certe grandezze, e distanze dipende, ma in oltre da certa quantità di elettrica potenza.

6. Presento or al globo grande, or ai fianchi dello stesso condottore un globo grosso mezzo pollice (*a*) nè mai da quel globo grande, nè dal condottore vedo pennello: (*b*) all' opposto su questo globetto presentato splende, e stride più dell' ordinario fino alla distanza di due pollici un ampio pennello; (*c*) ed ho simile pennello con globi presentati anche grossi due pollici a distanze minori.

Quindi il pennello non è proprio soltanto de' globi di vitrea elettricità, ma anche de' globi opposti.

7. Sul giogo dello stesso condottore fisso un globo grosso mezzo pollice, e presentando a questo verticalmente or l'uno, or l' altro de' globi precedenti, (*a*) non solo in que-

ſti, che ſi oppongono, ma inſieme nel primo, che ſul condottore fiſſai, brillano a certe diſtanze ampj, ed oppoſti pennelli, (*b*) nè vi è differenza, ſe non che nel globo di vitrea ſono anzi meno vivaci, e meno ſtridenti, e non ſcompariſcono, che a minori diſtanze.

E ſi raddoppia così in un ſol atto nelle oppoſte ſpecie, ed in ciaſcuna inſieme il pennello.

8. Cangiai l' apparato, e feci terminare il condottore in ſuperficie piana coll' armatura di quarto oppoſta al quadro verticale, come nella preparazione 20, e preſentando globi di varia grandezza al tubo, e all' armatura di quarto (*a*) non mai compariſce pennello nè da queſta al quadro, nè da queſta, o dal condottore verſo i globi preſentati; (*b*) e sbuffa, e frigge per oppoſto ſtrepitoſamente a diſtanza fino di tre pollici il pennello dai globi ſteſſi, che ſi preſentano.

Ed è così invertita la ſede, e l' eſpreſſione del pennello.

9. Ritorno alle punte non più acute, ma ſmuſſate, e ſcabre. Per raccoglierne in breve i riſultati, vedo ampj pennelli non ſolo in quelle, che dal condottore procedono, ma dalle ſteſſe preſentate a varie diſtanze or al globo, or ai fianchi, or a ſimili punte del condottore. Inſigni oltre modo ſono, e ſtridenti i pennelli ſulla punta di uno, o anche di più diti, che diſgiunti ſi preſentano (*a*) all' armatura di quarto deſcritta nel numero precedente; (*b*) ovvero alla piana ſuperficie del diſco in quella parte, che girando eſce ſuori dei cuſcini, quando è aſſai viva l' elettricità.

Non è in ſomma il pennello ſoltanto proprio delle punte di vitrea elettricità, ma anche delle oppoſte.

10. E quanto alla ſtelletta ben lungi di eſſere unicamente addetta alle punte, che al vitreo condottore ſi preſentano, riduco io ai caratteri, ed alle apparenze di ſemplice ſtelletta ogni luce, che dal vitreo condottore procede, purchè opportunamente (*a*) o ſi ſcemi la doſe di elettricità; (*b*) o ſi accreſca il numero, lo ſmuſſamento, e la ſcabrezza delle punte da eſſo procedenti; (*c*) o infine or più, or meno ſi accoſtino i condottori preſentati, e ſi variino così i limiti, e la perfezione del mezzo iſolante.

Nè la ſtelletta è altrimenti propria delle ſole punte, o ſcabrezze preſentate, ma delle punte ancora, e ſcabrezze ſpettanti al condottore di vitrea elettricità.

Legge Seconda. Nella stessa vitrea elettricità si tolgono, s' invertono, e si raddoppiano le apparenze di pennello col variare 1. la figura, 2. o la grandezza de' condottori, 3. o la quantità di eccitamento, 4. o gli intervalli, e la perfezione del mezzo ambiente.

In somma tutto ciò, che scema la prevalenza del momento in qualsivoglia preparazione, e ne accresce il momento nell' opposta preparazione, o nel mezzo ambiente, tutto cospira a trasformare in quella prima la stelletta in pennello.

Legge Terza. E con somiglianti modi nella specie stessa s' invertono, si tolgono, e si raddoppiano le apparenze di *stelletta*.

1. Questa, e la precedente legge risultano ad evidenza dalla dimostrazione della prima. Ed in ciò che riguarda la varia proporzione di elettrica potenza per torre, o raddoppiare, o invertere le apparenze di pennello, e di stelletta, lo verificai non solo nella preparazione 4 e 5, ma similmente in tutte le corrispondenti.

2. E per rapporto alla perfezione del mezzo ambiente debbono qui richiamarsi le osservazioni premesse nell' Art. 1. Legg. 6. n. 5. e 7. Poichè siccome per la diversa perfezione dei mezzi variano le generali apparenze di elettrica luce, così riconobbi nelle particolari forme della luce stessa le mutazioni corrispondenti.

3. Onde per trasformare il pennello in stelletta non altro si richiede, che accrescere il momento nei respettivi condottori, o diminuirlo nel mezzo ambiente.

Legge Quarta. Nè minori sono le varietà dei modi di togliere, invertere, e raddoppiare le differenze di luce, per le quali si vorrebbe distinguere la resinosa dalla vitrea elettricità.

1. La punta procedente da condottore di resinosa elettricità presenta nel suo apice la *stelletta*; e per opposto la punta al condottore stesso opposta estende innanzi a sè il *pennello*. E queste differenze, che si oppongono alle prime di vitrea elettricità (*legg.* 1. *n.* 1.) sono al pari di quelle certe, e costanti nel modo loro. Non basta però un modo solo per caratterizzare la specie, massime quando in tutti gli altri modi si tolgono, s' invertono, e si raddoppiano le differenze del primo. Indicano al certo le differenze di ciascun modo qualche differenza nella specie, d' onde quel modo procede, e

ben lungi dall' indebolire questo canone di fisica investigazione, ammetto anzi, e stabilisco generalmente, che per rintracciare le specifiche differenze delle cose non ha il Fisico altre vie sicure, se non per le differenze dei modi loro. Ma dico infine, che per fissarne in un sol modo il criterio della specie forza è, che quell'unico modo sia tanto costante, quanto lo è la specie medesima; e che unico sussista in tutte le altre varietà, alle quali la specie stessa soggiace. Or come ciò non ebbe punto luogo nella vitrea, vediamo qual costanza serbi nella resinosa.

2. Alla punta, che dal condottore di resinosa elettricità procede, oppongo un' altra punta procedente dal quadro, come nella preparazione della serie 6. E cominciando dalle più rimote distanze (*a*) sulla punta del quadro, che alla resinosa si oppone, non vedo il minimo indizio di luce, non che di pennello, finchè non arriva quella punta a distanza dell' altra circa d'un piede. (*b*) Quindi comincia su quella a comparire una tenue stelletta, che va lentamente accrescendosi mentre più si appressa, senza però mai prendere il minimo cenno di pennello appressandosi perfino al contatto della prima. (*c*) Al contrario sulla punta di resinosa elettricità brilla, benchè il quadro sia distantissimo, una viva stelletta con sibilo già notabile, quando l' opposta è ancor più distante d' un piede, ed imprime così a questa distanza nell' opposto quadro notabile carica. (*d*) Ed appressandosi vie più l' opposta punta col rinvigorirsi in questa la stelletta, dirette, che trae fuori dalla resinosa un' *orditura di pennello*, che tale si manifesta in fine colla figura, benchè non tanto grande, collo stridore, e colla varietà de' colori.

Abbiamo dunque la punta opposta alla resinosa senza veruna apparenza di pennello, e colla sola stelletta dai primi fino ai minimi intervalli; e per opposto nella punta resinosa coll' appressarsi di quella prende vigore l' orditura di pennello.

3. Tralascio per brevità altre analoghe combinazioni di punte; e passo ai globi di varie grandezze, e alle piane superficie. Oppongo al condottore terminante in grosso globo il quadro verticale come nella preparazione della serie 15. (*a*) Talvolta dal centrale punto opposto dell' armatura sbuffa da principio un pennello verso il globo; ma il più delle volte

volte nel successivo accostamento dal globo stesso stride, e si estende dal globo resinoso verso l'opposta armatura un ampio pennello. (*b*) Presento al globo del tubo un globo grosso due pollici, e poi altri minori; e da questi più di raro, e più breve, e soltanto a data minor distanza sprizza il pennello; sprizza all' opposto più frequente, e più continuo, e in maggiori distanze dal globo grande resinoso. (*c*) Adatto sul giogo del condottore un globetto di mezzo pollice, come nella Legge 1. n. 7., e presentando a questo altri globi di varia grandezza non mai in questi, e sempre in quello a varie distanze apparisce il pennello.

Si ha pertanto il pennello non solo dalle punte, ma dalle piane superficie, e da' globi opposti alla resinosa elettricità. E viceversa da' globi di resinosa elettricità parte con più costanza, e a maggiori distanze il pennello, che non dagli opposti. Ma nell' uno e nell' altro caso dipendono quelle apparenze da certa distanza, e grandezza di que' globi, e delle superficie.

4. Collo stesso apparato, e nelle stesse combinazioni se rendo or più, or meno vivo l' eccitamento di elettricità in ciascun giro del disco, riconosco, che non dalle sole grandezze, e distanze di que' globi, ma da certa quantità di elettrica potenza il pennello, e la stelletta dipendono.

Talchè tutto ciò, che accresce momento in una preparazione, cospira a tener in essa la stelletta.

5. Faccio terminare il condottore in piana superficie colla armatura di quarto opposta al quadro verticale, come nella preparazione della serie 16, e dal contorno di quella stridono lunghi, e ampj pennelli estesi verso l' opposto quadro anche a distanza di due pollici; nè mai si vede orma di pennello procedente dall' armatura del quadro.

Ed abbiamo così i pennelli procedenti dalle sole resinose superficie, e non dalle opposte.

6. In vece d' intertenermi in altre combinazioni di punte smussate, e di apparenze or di stelletta, or di pennello, che io induco non meno ne' resinosi, che negli opposti condottori con le cautele, e preparazioni somiglianti a quelle, che in fine della Legge 1. indicai; raccoglierò alcuni termini più costanti delle proporzioni di figura, grandezza, distanza, e quantità, che influiscono in que' modi varj di elettrica

luce . Poichè in tante varietà non altro , che le giuſte proporzioni guidar ci poſſono a ſpecifici criterj, e a diſtinte illazioni. Dirò adunque nelle ſeguenti Leggi ordinatamente della figura, e delle grandezze de' condottori; indi delle diſtanze , e delle quantità delle elettriche potenze confrontando nella identità di ſpecie diverſe preparazioni, e colla identità di preparazione le ſpecie diverſe.

Legge Quinta. Nelle diverſe preparazioni di figure, e di grandezza de' condottori colla ſteſſa ſpecie di elettricità prevale l' azione della punta acuta alla ſmuſſata , e queſta ai globi minori ; e in genere prevalgono ordinatamente le minori conveſſe, o piane ſuperficie alle maggiori.

1. Prevale , come in ogni genere di potenze , così nelle elettriche quella, che determina il moto. Ora nella ſteſſa ſpecie la prevalenza di azione non può d'altronde ripeterſi, che per momento acquiſtato dalla ſteſſa potenza. E ſiccome la luce naſce dal moto ſteſſo delle elettriche potenze , non v' ha dubbio , che ove comincia a manifeſtarſi luce , ivi non ſia prevalente il momento dell' elettrica potenza.

2. Si diſtinguano adunque i condottori di vitrea, e di reſinoſa elettricità, e riſpettivamente gli oppoſti a ciaſcuna con ordine di punte acute, e ſmuſſate, e di globi minori, e maggiori ; e di piane ſuperficie ſimilmente minori , e maggiori. Comincerà in tutti la luce, e perciò il moto ordinatamente dalla punta acuta prima , che non dalla ſmuſſata , e così in ſeguito prima dalla minore, che non dalla maggiore conveſſa, o piana ſuperficie.

Legge Seſta. Nella indentità di preparazione colle diverſe ſpecie di elettricità prevale alla vitrea l' azione della reſinoſa.

1. Queſta colla precedente Legge ſono corollarj de' Teoremi della prima , e ſeconda Parte; poichè con ſimili proporzioni s' imprimono le cariche a diſtanze tanto maggiori con punte, e coi condottori terminanti in minore conveſſa, o piana ſuperficie ; e ſimilmente più colla reſinoſa , che colla vitrea elettricità ſi eſtendono le cariche impreſſe.

2. Si provano in oltre direttamente coi fenomeni di luce . E in ordine alla quinta Legge tanto il pennello , come la ſtelletta compariſcono a diſtanze tanto maggiori dalle pun-

te acute, che non dalle ſmuſſate, e da queſte che non dalle conveſſe, o piane ſuperficie; e ciò non meno ne' condottori di reſinoſa, o di vitrea elettricità, che nei condottori a queſte riſpettivamente oppoſti.

3. E quanto alla ſeſta non meno dalle punte, o ſuperficie reſinoſe, che dalle oppoſte alla vitrea ſi hanno i ſegni di luce a diſtanze aſſai maggiori, che non da ſimili punte, o ſuperficie vitree, o riſpettivamente oppoſte alla reſinoſa.

Legge ſettima. E nella identità di preparazione, e di ſpecie prevalgono gli eceſſi di eccitamento, o di maſſe ſopra le ſpecifiche forze della reſinoſa, o della vitrea elettricità.

1. Con minore eccitamento ſi hanno ſegni di luce nella reſinoſa elettricità, e nei condottori oppoſti alla vitrea, che non colle ſteſſe preparazioni, ed eguale eccitamento nella vitrea, e ne' condottori oppoſti alla reſinoſa.

2. Per ottenere ſegni di luce a pari diſtanze dai condottori di vitrea, o dagli oppoſti alla reſinoſa elettricità d'uopo è di accreſcere in proporzione l' eccitamento, oſſia la maſſa, che a ciaſcun giro corriſponde nella riſpettiva ſpecie.

3. Ed appunto perchè più pronti, e vivi compariſcono i ſegni di luce colla reſinoſa, che non colla vitrea elettricità, quella più prontamente di queſta s'indeboliſce, e ſi diſperde; non altro eſſendo que' ſegni, ſe non l' atto ſteſſo della ſua diſperſione, oſſia il moto di riunione coll' oppoſta.

4. L' eccitamento maggiore, o eceſſo di maſſe neceſſario per rendere a pari diſtanze viſibile la luce con vitrea elettricità, che non colla reſinoſa, compenſa la minore forza ſpecifica della vitrea; e l' aumento neceſſario nella reſinoſa per rendere a pari diſtanze viſibile la luce nell' oppoſto condottore compenſa la minore mobilità dell' oppoſta, che da quello procede.

5. E nell' uno e nell' altro caſo ſi eſige quel maggiore eccitamento per ridurre a riunirſi intorno a que' condottori tanta doſe di elettricità o dall' ambiente, o dall' oppoſto mezzo, quanta è neceſſaria per far ſenſo di luce più o meno vivo, ed eſteſo.

Legge ottava. E confrontando le ſpecie fra loro nelle diverſe preparazioni 1. la punta acuta vitrea corriſponde alla reſinoſa ſmuſſata; 2. la punta ſmuſſata vitrea ad un piccolo

globo resinoso; 3. e il piccolo globo vitreo alle maggiori convesse, o piane superficie; e così ordinatamente.

1. Quegli eccessi di eccitamento per rendere in distanze pari alla resinosa visibili i segni di luce, che nella precedente Legge osservai necessarj e nella vitrea elettricità in sè stessa, e nella resinosa per rapporto agli opposti condottori, che non nella vitrea per rapporto ai suoi condottori opposti, dimostrano direttamente nella identità di preparazione e la maggiore efficacia della resinosa, e la maggiore mobilità della opposta alla vitrea. Nella presente Legge si confermano le stesse verità in tutte le diverse preparazioni dell' una e dell' altra specie, e nei condottori, che a ciascuna rispettivamente si oppongono; poichè si riduce questa in ciascuna parte ad evidenza di fatto.

2. E quanto alle semplici apparenze di luce ciò è manifesto in due modi. In primo luogo la punta acuta resinosa, e l' opposta alla vitrea come risplendono a maggiori distanze, che non la vitrea, o l' opposta alla resinosa, così certo smussamento di quelle prime rende in esse il cominciamento di luce a distanze eguali delle seconde acute. Queste adunque hanno bisogno del momento, o prevalenza di punta acuta per corrispondere alle resinose smussate (*legg.* 5.).

3. In secondo luogo nei globi, e nelle superficie vitree non splende mai luce se non a distanze minori (*legg. 1. n.* 4. 6. 7. 8.), che non da simili globi, o superficie resinose (*legg.* 4. *n.* 3. 4.); e per opposto i globi, e le superficie maggiori resinose hanno luce, quando ancor non ne hanno i globi, e le vitree superficie assai minori (*ivi*). Lo stesso accade ne' globi, e nelle superficie rispettivamente opposte. Onde vi vuole nella vitrea, e nell' opposta alla resinosa il momento, o la prevalenza di minore convessa, o piana superficie (*legg.* 5.) per ragguagliarne gli effetti.

4. E quanto alle differenze di lucide forme dalle precedenti citazioni è del pari manifesto l' indicato ragguaglio di punte acute colle smussate, e delle minori colle maggiori superficie per ottenere eguali forme di luce. Così per trasformare il pennello della punta vitrea al fine in vera stelletta, basta diminuire il momento del mezzo appressando in vece di convessa, o piana superficie (*legg. 1. n.* 1.) una punta acuta (*ivi n.* 3.).

5. All'oppoſto per avere pennello ſu i reſinoſi condottori d' uopo è accreſcere la reſiſtenza del mezzo con dilatare i termini, e le eſtremità de' condottori ſteſſi, e ſcemare per tal modo inſieme il momento e la prevalenza di punte acute, o di minori ſuperficie (*legg.* 4. *n.* 3. 5.). Nè ſulla punta acuta reſinoſa altro ſi vede mai, che una tenue orditura di pennello (*legg.* 4. *n.* 2.) perchè in qualſivoglia confronto di punte acute vitree, e in qualſivoglia diminuzione del mezzo reſiſtente prevale ſempre la ſpecifica forza della reſinoſa.

Legge nona. Nella comparazione delle ſpecie fra di loro non ſi deve indiſtintamente confrontare la reſinoſa colla oppoſta alla vitrea, nè colla vitrea confondere l' oppoſta alla reſinoſa; ma e ciaſcuna ſpecie coll'altra direttamente, e le oppoſte a ciaſcuna riſpettivamente fra loro debbono paragonarſi nelle particolari preparazioni.

1. Benchè in realtà la ſpecie oppoſta alla vitrea ſia reſinoſa, e l' oppoſta a queſta ſia vitrea; ciò non oſtante, quando ſi tratta di proporzioni, non poſſono alla rinfuſa compararſi, mentre non è la ſpecie, ma la quantità, e il momento di ciaſcun termine col ſuo omologo, e oppoſto, che cade in confronto. Ora è manifeſto per la Legge prima, e quarta, che di gran lunga prevalgono i termini di vitrea, e di reſinoſa ai termini, che a ciaſcuna ſi oppongono in qualſivoglia preparazione. Ed è ciò coerente alla natura ſteſſa delle coſe; poichè que' primi riguardano le potenze già ſciolte, eccitate, e raccolte; e gli ultimi non riguardano ſe non le potenze ſteſſe appena ſmoſſe, e nell' iniziale loro eccitamento, e capacità di raccoglierſi. In ſomma nei primi termini ſi confronta l' efficacia, e la forza di ciaſcuna ſpecie, e nei ſecondi la loro mobilità.

2. Somma è l' importanza di queſta Legge non ſolo per ovviare le vane contraddizioni, e i paradoſſi, che naſcer potrebbero dal confuſo paragone di que' termini, ma perchè ci ſomminiſtra vera, e piana ſpiegazione delle contrarietà oſſervate fra i corollarj del Capo primo, e del diverſo andamento di decadenza fra i primi e gli ultimi termini delle cariche impreſſe, che furono calcolate nel Teor. XIV. al n. 7., e nel Teor. XIX. al n. 4., ſiccome altrove dimoſtrerò, maſſimamente ſe con queſta ſi aggiungano le conſiderazioni della ſeguente Legge.

Legge decima. E in queſte combinazioni d' identità, o diverſità di ſpecie, di oppoſte a ciaſcuna, di preparazione, o eccitamento influiſcono le differenze de' mezzi condottori, o reſiſtenti con tali proporzioni d' intervalli, i quali come per i condottori più perfetti ſi eſtendono ai limiti indefiniti, così cominciano a riſtringerſi in certi limiti ne' condottori meno perfetti, e ſi fanno que' limiti ſempre minori, quanto gradatamente i mezzi frappoſti ſi ſcoſtano dalla perfezione di condottori, e paſſano per ſucceſſivi gradi a maggior perfezione di reſiſtenti.

1. Se le elettriche potenze eccitare, e raccogliere ſi poteſſero indipendenti dalle modificazioni del mezzo, ſi ridurrebbero non meno i fenomeni di luce, che gli altri ſegni loro, a ragioni coſtanti de' ſemplici elementi di ſpecie, di oppoſizione, di quantità, e di preparazione. Ma tanta è nelle coſe elettriche l' influenza del mezzo, che lungi dal poterſene preſcindere giammai, ſembra piuttoſto che ogni elettrica ricerca debba in fine riſolverſi in più intime conſiderazioni del mezzo ſteſſo, e delle ſue modificazioni. Naſcono d' ordinario le falſe induzioni per *errore di relazione*, quando da fenomeni, e fatti veriſſimi ſi conclude il falſo, perchè ſi riferiſcono a ſoggetti, o cauſe non vere, o almeno non adequate, nè ſolitarie. Ora non vi è in Fiſica altro capo, quanto l' elettrica materia, in cui ſi cada più comunemente in ſimili errori; perchè appunto ſi vuol preſumere ſemplice ciò, che è compoſto, e ſi vuole introdurre qual mero oſtacolo, o reſiſtenza il mezzo, che in mille forme regge le elettriche potenze, e l' azione ſua con eſſe compone.

2. Siccome però del mezzo già molte coſe notai e ne' Capi precedenti, e nell' articolo primo di queſto Capo, perciò baſterà qui richiamarne ſoltanto la memoria. Agiſce dunque il mezzo come veicolo ne' condottori, e come oſtacolo nei reſiſtenti, e ſegue nell' azion ſua una inverſa ragione della perfezione de' primi, e diretta de' ſecondi (*art.* 1. *legg.* 6. *n.* 5. *e* 7.).

3. Ma queſte azioni, e queſte ragioni di condottrice, e reſiſtente natura non ſi preſentano mai nè ſemplici, nè ſolitarie; ma ſi compongono cogli elementi delle elettriche potenze, che diſtinti abbiamo nella prima Parte. E viceverſa

questi stessi elementi non debbono precisamente ristringersi a certe elettriche potenze eccitate, o mosse quasichè esse per sè sole compiessero la loro azione; ma d' uopo è riflettere, che non si compie l' azione di quelle se non componendosi con simili elementi di nuove porzioni, e potenze elettriche eccitate, e mosse nel mezzo stesso resistente. Talchè qualsivoglia elettrico fenomeno benchè sembri più semplice, e piano non segue mai la sola ragione o dei condottori, o dei resistenti, o d' una specie, o quantità di elettrica potenza eccitata; ma risulta dal complesso di tutte le ragioni di condottori, e resistenti, e di contrarie, ed omologhe specie, e quantità eccitate intorno a quella prima.

4. L' arte di riconoscere ciascuna di quelle semplici ragioni consiste in renderne l' azione, quanto più si può, prevalente sopra gli altri elementi, sicchè per l' eccesso suo si conosca, giacchè non può sola assolutamente conoscersi.

5. E nel caso nostro le acute punte condottrici sono la più prevalente via di porre in moto le elettriche potenze, e di render minima l' influenza dei mezzi resistenti sopra di loro, e perciò con simili punte si ha luce alle maggiori distanze.

6. All' opposto le ampie superficie condottrici presentano maggior influenza al frapposto mezzo resistente non solo di semplice ostacolo, ma di nuove soluzioni; le quali si frenano a vicenda, finchè la prevalente azione dell' una o dell' altra superficie non ne determini il moto (*artic.* 1. *legg.* 4. *n.* 4., *e seguenti*).

7. Ed è appunto questa l' influenza de' mezzi, per cui i limiti del moto divengono tanto minori, e all' opposto tanto maggiori divengono le quantità di contrarie potenze a vicenda frenate, quanto sono più ampie, ed eguali fra loro le opposte superficie condottrici, e quanto è più perfetto il frapposto mezzo resistente.

Legge undecima. E le apparenze di pennello, e di stelletta 1. non nascono da veruna specie particolarmente più che dall' altra, 2. ma provengono da certa somma di azione, o da certo momento di ciascuna contro le frapposte, ed opposte resistenze.

1. La prima parte di questa è immediata conseguenza delle precedenti Leggi, e principalmente della prima, quarta,

settima, e ottava. Onde non resta che di soggiungere qualche dichiarazione della seconda parte. Per intendere che cosa sia *certa somma di azione*, *o certo momento*, da cui il pennello, o la stelletta proviene, d'uopo è formarsi chiara idea dell'uno e dell'altra. La stelletta sibila stabilmente sull'apice della punta, in cui splende; il pennello stride instabilmente verso la sua base, cioè in parte opposta, e in fuori della punta, o dalla superficie, da cui procede (*legg.* 1. *n.* 1.). Ora e il sibilo, e lo stridore non sono altro, che vibrazioni impresse nell' aria ambiente in ciascun punto, ove la riunione, e lo scoppio succede delle contrarie elettricità; nè quel sibilo, e stridore è differente dallo scoppio strepitoso delle grandi scariche, se non in proporzione di quantità. Nella stelletta adunque si riuniscono le contrarie potenze stabilmente, e continuamente sull' apice della punta; e nel pennello non si riuniscono, che vagamente in varj punti più esterni, e nella base del medesimo.

2. Il moto poi fra le contrarie potenze comincia, e si mantiene dalla parte prevalente (*art.* 1. *legg.* 5. *n.* 6.). E l' ordine, e la progressione delle parti prevalenti già è fissato nelle precedenti Leggi quinta, sesta, settima, e ottava. Quindi quella certa *somma di azione*, *o momento* non altro significa, se non il numero de' punti, e la distanza de' medesimi dalla estremità degli opposti condottori, fra i quali a preferenza si determina, e si compie l' incontro, e la riunione delle contrarie potenze.

3. E perciò non è la stelletta se non l' effetto di quell' incontro, che si mantiene raccolto, e ristretto per prevalente costanza di azione sull' apice delle punte, e degli spigoli de' condottori; e non è il pennello se non l' effetto del moto stesso, che comincia, e progredisce incostantemente diviso, e sparso in più punti, e in varie distanze dalla estremità de' condottori, fra i quali di continuo si mutano i limiti di azione prevalente. Il numero de' punti ne dilata la figura; la continua varietà delle distanze rende que' punti per la loro celerità simili a striscie, o raggi lucidi. E perciò non è il pennello, che una partizione di stelletta in continuo moto.

4. E quanto alle resistenze, nell' aria più rara si fa tanto

to minore il ſibilo, e lo ſtridore di que' ſegni; e per oppoſto ſi fa ne' medeſimi tanto più eſteſa, e diviſa la luce.

Legge duodecima. Nè in tutte queſte differenze ha veruna influenza la ſuppoſta contrarietà nella ſemplice direzione di un fluido ſolo.

1. In vano tentarono abiliſſimi Fiſici di ſcorgere la direzione dell' elettrica luce. Per quanto ſia facile di travedere, quando s' immagina prima di oſſervare, tanta però è l' evidenza del fatto, che niuno portò l' illuſione fino a tal ſegno di aſſerire definita, e viſibile la direzione coſtantemente più da una, che dall' altra parte. I lucidi pennelli, e i condottori luminoſi furono ſoltanto poſti in opera per dimoſtrarne la preſenza dalla parte di vitrea elettricità; ma in mezzo alle prevenzioni, e alle induzioni incautiſſime non ſi produſſero mai come viſibili prove di luce procedente da quella ſteſſa parte.

2. Ora non rimane più verun dubbio dopo le induzioni diſtinte, che compiute abbiamo nella Legge prima, e quarta, che le ſteſſe apparenze non ſi preſentino del pari dalla parte di elettricità reſinoſa; mentre tutto quel giuoco non dipende, ſe non dalla varia combinazione di preparazioni per ragguagliare i momenti di quelle potenze (*legg.* 8.). Onde nulla in quelle differenze influiſce nè la ſemplice direzione invano ricercata, nè la contraria apparenza fallacemente prodotta di un ſuppoſto fluido ſolo.

Legge decimaterza. Nella varietà, e incoſtanza della ſua direzione ha l' elettrica luce coſtantiſſima legge di cominciare dalla parte prevalente.

1. Comincia, come vedemmo nella ſeconda parte della Legge decimaprima, l' elettrica luce dalla parte prevalente. E perciò ſe queſta prevalenza ſia ſtabile ſull' una, o ſull' altra metallica punta, o ſopra ambedue inſieme, ſu quelle compariſce in forma di viva ſtelletta; ed ivi ſi mantiene immobile, finchè non naſce progreſſione di quel moto dall' una, o dall' altra parte. Che ſe tale prevalenza ſi eſtende tra i limiti delle metalliche punte, o ſuperficie, ivi ſimilmente comincia l' elettrica luce; ma per la mobilità del mezzo, e per la varietà, che in que' limiti prevalenti naſce coll' atto ſteſſo, che comincia la luce, mutano eſſi di continuo ſede, e

alternano con incredibile celerità le diſtanze in punti ſempre varj or più, or meno diſcoſti dalle metalliche punte, o ſuperficie, e formano colla loro rapidità, e moltiplicità quella ſimultanea impreſſione di luce degradata in tanti colori, ed incoſtante nella ſua grandezza, come è il pennello.

2. Conſiſte adunque il pennello nella continua mutazione dei limiti di prevalenza fuori delle metalliche punte, o ſuperficie. E perciò finchè que' limiti cadono entro le metalliche punte, o ſuperficie, non può ſe non mantenerſi immobile ſulle loro eſtremità quella impreſſione di luce, che alla quantità corriſponde delle elettriche potenze in moto di riunione.

3. Ma que' limiti prevalenti vogliono conſiderarſi in due modi, ſiccome diſtinti abbiamo due modi nella mutua azione, e nel moto delle elettriche potenze. Primieramente vi è un limite tra la ſpecie, che in ciaſcuna punta, o ſuperficie riſiede, e le finitime potenze del mezzo ambiente; e quindi ne riſulta quel moto di contrarie elettricità, che ſpiegammo nell' articolo 1. Legge ſeconda n. 2. lett. *e*, ed ivi Legge terza, e ſeſta. In ſecondo luogo poi vi è un limite tra le due ſpecie ſteſſe, che nelle oppoſte punte, o ſuperficie riſiedono, le quali per la via ſteſſa del mezzo, e delle frappoſte elettricità a vicenda tendono a riunirſi; e nuovamente in queſte cade altra diſtinzione, per la quale ora in parte, ora pienamente ſi determinano al moto di riunione, ſecondo che nell' articolo ſteſſo dichiarammo nella Legge quarta.

4. Ora tanto il primo di queſti modi, come la prima parte del ſecondo non determinano mai la piena unione di quelle contrarie potenze, nè l' intero ſcoppio fra i limiti delle oppoſte punte, o ſuperficie, nelle quali eſſe riſiedono, ma non producono ſe non ſoffj, o ſprizzi luminoſi in proporzione o delle parti ſmoſſe nel frappoſto mezzo per azione delle oppoſte, o delle parti di queſte, che cominciano a riunirſi. Del pieno ſcoppio, e de' ſuoi limiti fra quelle oppoſte potenze diremo più opportunamente nella terza Parte; e qui proſeguiremo a conſiderare que' modi, che finiſcono in ſoffj, o ſprizzi luminoſi, e in varie forme di ſtelletta, e di pennello ſi manifeſtano.

5. Sarà pertanto il ſoffio uniforme come ſibilo, o ronzio,

e sarà la luce stabile sull' estremità delle punte, o degli spigoli de' condottori, finchè entro questi si conservano i limiti prevalenti, che quel soffio, e quella luce producono. E sarà per opposto in continuo moto a foggia di stridore, e di luce incostante, quando que' limiti per essere esternati in fuori de' condottori soggiacciono a continue mutazioni, siccome da principio notato abbiamo (*n.* 1, *e* 2).

6. Rimane in oltre da investigare in quale delle due parti a preferenza si esternino fuori de' condottori que' limiti prevalenti, dai quali prende cominciamento l' elettrica luce. Poichè se per essere que' limiti entro i condottori si mantiene alla loro estremità la stelletta, così non comincerà questa a trasformarsi in apparenza di pennello se non da quella parte, nella quale que' limiti s' inoltrano più prontamente nel frapposto mezzo fuori de' condottori.

Legge decimaquarta. I limiti prevalenti, che il moto determinano della elettrica luce, cominciano prima, e si mantengono più costanti entro le punte, o superficie de' condottori di resinosa; cominciano all' opposto più tardi, e più prontamente finiscono con esternarsi in fuori a preferenza dalle punte, o superficie de' condottori di vitrea elettricità.

1. Risulta questa dai fenomeni descritti nelle precedenti Leggi sesta, settima, e ottava. Poichè in parità di preparazioni la punta, o superficie resinosa è sempre la prima a splendere con luce di stelletta, ed è poi l' ultima a prender forma, o cominciamento di pennello; e viceversa la punta, o superficie vitrea comincia più tardi a dar luce di stelletta, ma più prontamente passa alle forme di lucidi pennelli. Lo stesso con proporzione si verifica nelle punte, o superficie opposte alla vitrea, e resinosa elettricità, che a quelle sono corrispondenti.

2. E rapportando questi fenomeni ai diversi modi, che distinti abbiamo nella precedente Legge (*n.* 3. *e* 4.) debbono que' prevalenti limiti considerarsi non meno fra le rispettive potenze di ciascun condottore, e del mezzo ambiente, che fra le porzioni spettanti agli opposti condottori. Talchè non si esterna giammai in fuori di uno di que' condottori l' apparenza di pennello, se non per diminuito momento nella preparazione, che al condottore stesso appartiene, e per ac-

cresciuto momento o nel mezzo ambiente, o nell' opposto condottore (*legg.* 5. *e* 7.).

3. E quando quell' opposto momento cresce a tal segno da comporsi colle frapposte potenze, e introdurre pel mezzo stesso un libero, e continuo moto fra quelle degli opposti condottori, allora si ha scintilla piena fra loro e lo scoppio corrispondente alle somme delle intere potenze, che in que' condottori, e nel frapposto mezzo risiedono. Che se per qualunque freno, o resistenza sia quel momento ristretto o fra i limiti della rispettiva faccia del mezzo frapposto, o soltanto in parte determini i moti dell'opposta, non si ha mai piena scintilla, nè intero lo scoppio, ma brillano nei termini dell' uno e dell' altro condottore quelle lucide forme, che fin qui abbiamo distinte.

4. Onde si può in fine dedurre la progressione de' momenti, che atti sono a cominciare, e sostenere ne' loro termini l' elettrica stelletta; ed estenderla poi, e dividerla in forma di pennello oltre i loro termini nel mezzo frapposto, finchè arrivino ai limiti dell' intero scoppio, ed accresciute per opposto le distanze, o le estese superficie si rende quella luce tenuissima e insensibile alla vista; nè altrimenti è notabile, se non direttamente al tatto pel senso di *aura*, o *venticello*, e indirettamente alla vista *pel moto di leggeri corpicelli* nel mezzo stesso immersi, come esponiamo nella seguente, ed ultima Legge.

Legge decimaquinta. Nasce la stelletta ne' termini de' condottori per momento prevalente di moto colla contraria elettricità del mezzo ambiente; e in que' termini si mantiene, finchè entro que' condottori s' inchiudono i limiti di quella prevalente azione. Scema questa gradatamente nelle maggiori distanze, e cessa in fine di far luce. Ma nelle distanze minori si esterna in varj punti del mezzo frapposto, e si estende, e divide per esso in apparenza di pennello, finchè non arriva ai limiti d' intero scoppio colla piena unione delle opposte potenze.

1. Tutto ciò che cresce i momenti di azione d' un condottore, come sono le punte, o gli spigoli, la specifica forza, o il maggiore eccitamento, o il diminuito momento nel mezzo ambiente tutto cospira a far comparire, e sostenere ne'

termini di esso la stelletta (*legg.* 3. *legg.* 4. *n.* 4. *legg.* 8. *n.* 4.) . All' opposto tutto ciò , che scema il momento di qualsivoglia preparazione, e lo accresce nell' opposta, o nel mezzo ambiente, tutto cospira a trasformare la stelletta in pennello (*legg.* 1. *n.* 3. *e* 9. *legg.* 2. *legg.* 4. *n.* 5. *legg.* 8. *n.* 5.).

2. Che la stelletta sia effetto di prevalente , e costante momento, lo manifesta la vivacità, e l' integrità della sua luce non mai divisa in varietà di colori, come lo è il pennello; in oltre il sibilo, o ronzio continuo sull' apice della punta è sempre più notabile, che non nella corrispondente base del pennello ; di più la maggior forza di carica , che nell' opposto quadro s' imprime colle apparenze di stelletta , che non di pennello; e viceversa s' indebolisce assai più, qualunque eccitamento, o ammasso di elettricità quando la stelletta , che quando il pennello da essa procede . E in fine per essere la stelletta sempre il primo, e l' ultimo termine d' ogni elettrica luce, mentre non è il pennello, che un modo instabile , e d' una intermedia combinazione , ed espansione della stessa.

3. In due modi poi quel prevalente momento di azione va degradandosi nelle successive maggiori , o minori distanze degli opposti condottori . E quanto al primo nelle distanze successivamente maggiori di condottori opposti si rende a grado a grado più tenue la mutua loro azione, e diventa in fine incapace di smovere nel frapposto mezzo tanta elettricità da far senso di luce . Ed anche nelle minori distanze , se molto si estenda la superficie degli opposti condottori, e cresca la perfezione del mezzo frapposto, si frenano le elettriche potenze in proporzione che si smuovono; nè perciò sono capaci di fare attraverso lo stesso tanto moto per dare impressione di luce (*legg.* 7. *n.* 6. *e* 7.).

4. Queste potenze però o smosse in tenue quantità, o frenate nell' ampiezza delle condottrici superficie secondo la perfezione del frapposto mezzo , benchè non si manifestino con lucidi segni , producono altri effetti di moto intestino fra le parti del mezzo ; i quali effetti secondo la solida, o fluida , opaca , o trasparente natura dello stesso , si rendono or più, or meno sensibili *con adesioni*, *con mutazioni di figura*, *con moti*, *e con venticello*, come a suo luogo diremo.

5. Resta che qui diciamo del secondo modo, e degradamento, con cui quel prevalente momento si esterna in fuori de' condottori nel mezzo ambiente. Qualunque volta si paragonano due forze in mutua opposta azione si trova fra di loro un punto, in cui i loro momenti si equilibrano, fuori del quale l' una o l' altra necessariamente prevale. Ora se quel punto, in cui sarebbero equilibrio, si trovi entro i termini di un condottore, anche i punti, che fuori di quel punto comincino a costituire i momenti prevalenti dall' una e dall' altra parte, proseguiranno per maggiori distanze a trovarsi entro que' termini, e saranno così entro del condottore istesso i limiti di prevalente azione. In parità di preparazioni si conserva più costantemente il prevalente momento entro i termini dei condottori di resinosa, che non di vitrea elettricità (*legg.* 14.). Onde per ragguagliare que' termini d' uopo è reciprocare gli eccessi de' momenti nelle rispettive preparazioni. E perciò qualora nel successivo accostamento degli opposti condottori nelle stesse, o diverse preparazioni s' inducono i limiti di prevalente momento fuori de' termini dell' uno, o dell' altro, o di ambedue i condottori nel mezzo frapposto, si trasforma così ne' modi, che già divisati abbiamo nell' uno, o nell' altro, o in ambedue insieme la stelletta in apparenza di pennello; e si mantiene questo, finchè tutti insieme que' momenti non cospirano a compiere l' unione delle opposte potenze nei limiti della piena scintilla, o dello scoppio fulminante, del quale proposto abbiamo di trattare nella terza Parte.

ARTICOLO III.

Applicazione delle generali e particolari Leggi precedenti alla elettrica Teoria.

Riducendo a generali, e particolari Leggi distinte la varietà delle apparenze di elettrica luce non altro io feci ne' precedenti articoli, che una continua, e fedele applicazione ai fenomeni stessi di que' principj, ed elementi d' ogni elettrica azione, che previamente stabiliti furono ne' Teoremi della prima, e seconda Parte della presente Analisi. Avrei in tal modo per rapporto all' elettrica luce cominciata

quella dimoftrazione degli ultimi teoremi, che rimandai alle fingolari induzioni, e alle ragioni proprie d'ogni capo d'elettrica dottrina, fe in molti de' più recenti Scrittori delle cofe elettriche non dominaffero fulla fignificazione di que' lucidi fegni quelle finiftre interpretazioni, e prevenzioni fallaci, che accennate abbiamo, e delle quali ragion vuole che diciamo alquanto più diftintamente. Così d'ordinario accade nelle vie della verità, che fi rendano piane, e ficure non meno con fiffarne la direzione, e ftabilirne i fondamenti, che con troncare i bivj, e fpianare gl'inciampi, che per effe s'incontrano.

Gioverà pertanto riandare fedelmente con brevità per la ftoria di que' lucidi fegni, quali a mano a mano fi prefentarono all'ingenua offervazione de' più gravi, e fagaci Maeftri. Conobbe quelle differenze di luce *Bofe*, e le diftinfe coi nomi di luce mafchia, e luce femmina, per illufione di aver creduta più debole quefta, che anzi più potentemente fi difperde, e perciò lafcia minor refiduo; e più forte l'altra, appunto perchè meno fi difperde, e indebolifce meno l'eccitamento, o l'ammaffo della rifpettiva potenza. Cadde *Nollet* nella fteffa illufione; e indi ftimò quelle diverfe apparenze infufficienti a ftabilire le differenze di fpecie, che già erano ftate indicate da *Gray*, e *Du-Fay*, e diftinte coi nomi di refinofa, e di vitrea elettricità. Prefe in fine *Le Roy* a dimoftrare con ampia difcuffione la differenza di codefte fpecie, e defcriffe la ftelletta per criterio della refinofa, come il pennello della vitrea.

Di quanta fede fien degni fimili criterj ciafcuno lo comprende dall' analifi de' medefimi riferita nella prima, e quarta Legge del precedente articolo. Ma in propofito noftro niuno fra tanti Offervatori vi fu, che riconofciuto abbia in que' diverfi fegni ragionevole indizio di contrarietà nella direzione della materia, onde fono prodotti. *Watfon* medefimo, che prima, e più d'ogni altro s'inoltrò colla fcorta della efperienza a rintracciare le direzioni delle elettriche potenze, non ne riconobbe giammai veruna direzione conforme o all'uno, o all'altro di que' fegni; nè in conto alcuno gl'induffe per teftimonj di contrarietà.

Fu il primo *Franklin*, che dopo di aver precariamente ad-

ottata la ſua prima idea di *poſitiva*, e di *negativa* natura delle oppoſte elettriche potenze, azzardò coerentemente l'altro penſiero ſulla eſpreſſione di que' ſegni; e ſoſpettò, che il pennello procedeſſe da eſito, o emanazione, e la ſtelletta da ingreſſo, o aſſorbimento di quell' unico fluido, che egli preſuppoſto avea qual ſola cagione, e baſe d' ogni elettrico effetto. Vero è, che egli non propoſe ſimili idee, che a foggia di mere poſſibilità, o di ſemplici ſoſpetti; e proteſtò eſpreſſamente, che quanto a fior di pelo ſono eſſe luſinghiere, e ſembrano a primo lancio plauſibili, altrettanto poi ſi trovano infide, e diſcordi coll' evidenza de' fatti particolari, e ben diſtinti, qualora ſi ha la pazienza per internarſi di propoſito ne' loro confronti (*). Tale in ſomma è di que' lucidi ſegni la ſtorica deduzione dai primi tempi, che cominciarono a coltivarſi gli elettrici ſtudj, fino all' epoca di *Franklin*.

Preſero voga le Frankliniane idee, e diventò *Franklin* Capo ſcuola, e duce di ſiſtematica Setta, e tanto baſtò perchè tutte le ſue congetture, e per fino i ſuoi più azzardati ſoſpetti veniſſero dai Frankliniani Settarj traſformati in dogmi, e propoſti, e difeſi con linguaggio di fanatica perſuaſione. Si definì pertanto *la luce di partenza*, *e la luce di ritorno*; *ſi deciſe*, *che il pennello dà*, *e la ſtelletta riceve*; e ſi ſtabilì quello quaſi preſidente all' *eſito*, queſta all' *introito* d'ogni elettrica ſoſtanza. In mezzo però a tante definizioni, e tanti ſtabilimenti non acquiſtò l' elettrica ſcienza, che ampie parafraſi de' primi fatti indicati da *Franklin*, pronunciate con altrettanta confidenza, e perſuaſione, quanta fu la perpleſſità, e l' incertezza del loro Autore.

Non

(*) *Franklin Oevres* Vol. I. pag. 59. Ces explications du pouvoir, et de l' operation des pointes lorſqu' elles ſe preſenterent a moi pour la premiere fois, et qu' elles rouloient dans mon eſprit, me parurent ſatisfaire parfaitement à tout. Mais depuis que je les ai miſes par ecrit, et rappellées à un examen plus ſévere, et reflechi, j' avoue de bonne foi qu' il me reſt quelques doutes a cet égard. Mais n' ayant rien de mieux pour le preſent à vous offrir à la place, je ne les rejette pas abſolument; car c' eſt ſouvent utile de lire même une mauvaiſe ſolution ecc.

Ibid. pag. 150. Ces penſées, mon cher ami, ne ſont que hazardées, et ébauchées pour la plupart; e ſi je n' avais que l' ambition de me faire quelque réputation dans la philoſophie, je le garderois par devers moi juſqu' a ce qu' elles fuſſent perfectionnées, et rectifiées par le tems, et par des nouvelles expèriences. ecc.

Non ſarebbe pregio dell' opera d' intertenermi qui nella diſamina di ſimili prevenzioni. Un errore finchè non diventa pubblico, e non turba il libero andamento della verità, non merita di eſſere ſolennemente conteſtato. Ma quando pubblicamente ſi produce ſotto le diviſe della verità, e ne confonde le ingenue ſembianze, non ſi può far meno di non ſegnarlo a dito, e sfatare quegli incanti, coi quali nella ricerca del vero ai meno accorti fa illuſione, e l' incauta moltitudine ſeduce. Non è punto neceſſario, nè opportuno di aſſociare all' errore i nomi degli Autori, che hanno contribuito a propagarlo; maſſimamente quando i loro nomi non influiſcono nella realità delle coſe; e tanto meglio quando, come ebbero eſſi l' ingenuità di confeſſare di aver errato nel definir la luce di partenza, così è ſperabile, che con più matura diſcuſſione de' fatti poteſſero egualmente riconoſcere il loro abbaglio nella luce di *ritorno*, ed in ogni altra ſomma d' *introito*, e di *eſito* delle elettriche azioni.

Sarebbe un vero morale paradoſſo, che illuſtri Autori, i quali la vita loro conſumano negli ſtudj delle ſcienze naturali, ſi ſcorgeſſero in fine dominati piuttoſto dall' intrattabile fanatiſmo di partito, o di ſetta, che animati dal tranquillo, e docile ſpirito della verità. Non è mai ſenza pericolo, ed è ſenza fallo perfettamente inutile intraprender diſputa con teſte di partitante, o di ſettario. Per nulla d' immiſchiarmi intendo con ſiffatti Diſputatori; e come nulla oſſervo, o ſcrivo per eſſi, così alle opinioni, e ai giudizj loro io nulla attendo. Ai pacifici ſeguaci del vero, che ſoli meritano il nome, e il pregio di Filoſofi, preſento di buon grado le precedenti mie rifleſſioni per avvertirli nei bivj, e negli inciampi, che indur potrebbero traviamento, o ritardo nelle elettriche ricerche, ed ai medeſimi propongo le analitiche mie produzioni per dirigermi inſieme con eſſi a qualche ſicuro termine di elettrica Teoria.

Ed in ciò, che i moltiplici fenomeni riguarda dell' elettrica luce ne riſtringerò per ultimo i riſultati delle precedenti generali, e particolari Leggi nel ſeguente

TEOREMA. XXVI.

L' elettrica luce nei comuni rapporti colla generale teoria della luce, e della viſione non ha maggiore eſpreſſione delle già note induzioni, e incertezze degli Ottici principj; e nei generali rapporti cogli elettrici ſenomeni naſce al pari degli altri ſegni per certa proporzione di moto delle contrarie elettriche potenze; e ne' particolari ſuoi accidenti di figura, grandezza, ſtrepito, e vivacità, o varietà di colori ſi riduce alle combinazioni de' moltiplici elementi, che modificano, e compiono i momenti d' ogni elettrica azione.

SOPRA L' EQUAZIONE
D' UNA CURVA,

Sopra la falſità di due famoſi Teoremi; e ſopra le ſerie armoniche a termini infinitamente piccioli.

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Univerſità di Pavia.

AL SIGNOR......

ECcomi a mantener la parola. Io le promiſi di voler penſare ne' momenti, che mi laſciano di libertà le ordinarie mie occupazioni, alla Curva, di cui ella mi parlò nel Carnovale ſcorſo, invitandomi a ricercarne l'equazione ad effetto di poterla in qualche modo deſcrivere per una ſerie continua di punti quanto ſi voglia vicini, e quindi determinare quelle proprietà, che poſſono renderla degna della curioſità degl' intendenti, e raccomandabile ai Geometri. E ſiccome parvemi, che ella allora mi diceſſe, che qualora aveſſe in ſuo potere l' equazione di una tal curva, non piccioli vantaggi poteva riprometterſi nell' applicazione, che diviſava di farne ad alcuni principj della Scienza Armonica eſpoſti nell' opera, che intorno a queſto argomento da molto tempo ella ſta preparando per le ſtampe; perciò tanto più volentieri mi ſono fatto premura di compiacerla, applicandomi con qualche ſorta d' impegno a queſta difficile e laborioſa ricerca. Io mi poſi da principio al lavoro con poca ſperanza di riuſcita; maſſime dopo avere da lei compreſo, che molti altri di me più eſperti avevano tentato di rompere queſto iſtmo, ma ſempre inutilmente. Pare in fatti ſulle prime, che le condizioni del Problema eſcludano quella ſerie continua di punti, la quale coſtituiſce il carattere di ogni linea curva, la di cui equazione,

qualunque ella ſia, indica ſempre in ogni ramo della Curva o un' aſſoluta e rigoroſa continuità, o per lo meno una tal vicinanza fra due punti qualunque conſecutivi, che la loro diſtanza ſia minore di ogni dato piccioliſſimo intervallo. La Curva richieſta all' oppoſto ſembra a prima viſta dover ammettere una vera interruzione nelle ſue parti, ed una diſtanza aſſegnabile da un punto all' altro ſucceſſivo; nel qual caſo i ſuoi punti a maggior ragione ſi direbbono *punti diſcreti*, che non ſi dicono quelli delle Curve eſponenziali rappreſentate dall' equazione $y = (-a)^x$, dove una quantità negativa viene elevata ad un eſponente indeterminato e variabile. Ma il fatto ſta che queſta prima apparenza ſvaniſce poi ſubito per poco che uno s' interni nell' indole della quiſtione, offrendoſi allora allo ſpirito del Geometra inveſtigatore quella perfetta continuità che da prima non ſi aſpettava, e le condizioni del Problema non parevano promettere. Ma ella già mi dimanda, *queſta Curva è ella algebraica, oppur traſcendente?* Io vorrei poterle riſpondere, che la Curva è del genere delle *algebraiche* o *geometriche*, ma ſono coſtretto a dirle, che eſſa appartiene alla ſublime *famiglia* delle *hypergeometriche* o *traſcendenti*. E' però vero, che in compenſo di ciò ella è d' altra parte così pellegrina e ſingolare, e nel tempo ſteſſo la ſua equazione è così ſemplice ed elegante che non ſi potrebbe deſiderare di più.

Per altro la coſa per me più inaſpettata nel maneggiare un tal ſoggetto non è già ſtata quella di eſſermi imbattuto in un' equazione tanto ſemplice e facile, ma bensì di aver riſcontrato nella forma di tal equazione quella Curva medeſima, che io ora ſono circa tre anni avea già pubblicata nelle mie *Diſquiſitiones Phyſico-Mathematicæ* nel Problema II della *Diſquis. IX*, dove cerco la Curva, cui percorre il centro di gravità della circonferenza d' un cerchio, qualora da queſta ſi va levando di mano in mano un arco, e poi l' altro ſino a che non reſti più alcun reſiduo. Certamente non è ſtata picciola la mia meraviglia nell' oſſervare, che due curve a prima viſta tanto diverſe non ſono poi altro in fine che una medeſima curva, e nel trovarla dotata della bella proprietà meccanica conſiſtente nell' eſſer quella il luogo geometrico de'

centri di gravità degli archi circolari ſminuiti ſucceſſivamente dall' intera circonferenza ſino all' arco evaneſcente. Venghiamo pertanto al Problema.

PROBLEMA.

In una retta indefinita MQ *dato un punto* A, *e fuori di eſſa un punto qualunque* B, *ſicchè la retta* AB, *e l' angolo* BAQ *rieſcano noti, ſi meni ad* AB *la perpendicolare* BC; *e ſi divida l' angolo* BAQ *per metà colla retta* AC, *la quale incontra in* C *la detta perpendicolare* BC: *parimente guidata ad* AC *la perpendicolare* CD, *ſi divida per metà l' angolo* CAQ *colla retta* AD, *che ſomminiſtra un altro punto d' interſezione* D, *e così guidata alla* AD *la normale* DE, *e dividendo colla* AE *per mezzo l' angolo* DAQ, *ſi avrà un terzo punto d' interſezione* E. *Procedendo di queſto tenore all' infinito, ſempre con la perpendicolare all' ultima retta, e bipartizione eguale dell' angolo rimanente, ſi avranno infiniti punti ſino all' ultimo punto* H, *che viene a caſcare ſulla retta indefinita* MQ, *ed è l' ultima interſezione della perpendicolare, e della biſecante l' angolo reſiduo. Ciò ſtante ſi dimanda* 1. *La poſizione di queſto punto* H *ſulla indefinita* AQ, *ovvero il modo di ſubito determinarlo.* 2. *L' equazione o algebraica, o traſcendente, qual più ella ſarà, della Curva, che paſſa pe' punti* B, C, D, E, F, H.

SOLUZIONE.

Un raggio vettore indefinito AD della Curva facciaſi $= z$, e l' angolo pur indefinito DAQ compreſo da eſſo e dalla AQ dicaſi $= u$, o piuttoſto ſia u l' arco di cerchio deſcritto col raggio arbitrario 1, e miſurante il detto angolo. Ciò fatto, è manifeſto dalle condizioni del Problema, che nel triangolo DAE rettangolo in D, l' angolo AED, che è complemento di DAE, è pur complemento di $\frac{1}{2}$ DAQ: onde il coſeno di $\frac{1}{2}$ DAQ ſta al ſeno tutto, come DA ad AE, ovvero

$\cos.\frac{1}{2}u : 1 :: z : \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u} = AE$. Per ſimil modo nel triangolo rettangolo AEF ſta il coſeno di EAF, ovvero di $\frac{1}{2}EAQ$, ovvero di $\frac{1}{4}DAQ$ al ſeno tutto, come AE ad AF, vale a dire $\cos.\frac{1}{4}u : 1 :: \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u} : \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u} = AF$. Così il raggio vettore conſecutivo ad AF troverebbeſi $= \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{8}u}$, il conſecutivo a queſto verrebbe $= \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{8}u\cos.\frac{1}{16}u}$, onde per fine ſi ottiene l' ultimo $AH = \frac{z}{\cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{8}u\cos.\frac{1}{16}u\ldots\ldots\cos.\frac{1}{2^n}u}$ preſo per n un numero infinito.

Ora è noto dalla teoria delle funzioni circolari, che $\text{ſen}.u = 2\,\text{ſen}.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{2}u$, $\text{ſen}.\frac{1}{2}u = 2\,\text{ſen}.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{4}u$, $\text{ſen}.\frac{1}{4}u = 2\,\text{ſen}.\frac{1}{8}u\cos.\frac{1}{8}u$, $\text{ſen}.\frac{1}{8}u = 2\,\text{ſen}.\frac{1}{16}u\cos.\frac{1}{16}u$, e così diſcorrendo: dunque fatta nella primitiva equazione $\text{ſen}.u = 2\,\text{ſen}.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{2}u$ la ſoſtituzione del valore di $\text{ſen}.\frac{1}{8}u$, e così appreſſo degli altri, naſcerà $\text{ſen}.u = 2^n\,\text{ſen}.\frac{1}{2^n}u\cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{8}u\cos.\frac{1}{16}u\ldots\cos.\frac{1}{2^n}u$, ovvero $\frac{\text{ſen}.u}{2^n\,\text{ſen}.\frac{1}{2^n}u} = \cos.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{4}u\cos.\frac{1}{8}u\cos.\frac{1}{16}u\ldots\ldots\cos.\frac{1}{2^n}u$, dove n indica un numero qualunque. E di qui ſi vede, che il prodotto d' un

numero qualunque di fattori espressi da' coseni di angoli decrescenti in progressione dupla è uguale al quoziente, che nasce, se il seno dell' angolo primitivo si divide pel numero ultimo, a cui si vuol arrestare la progressione, moltiplicato pel seno dell' ultimo angolo corrispondente.

Che se in vece de' coseni si volesse far uso delle secanti, allora per essere il coseno eguale al quadrato del raggio diviso per la secante, si fa manifesto, che si presenta

$$\frac{2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n} u}{\text{sen. } u} = \text{sec. } \frac{1}{2} u \text{ sec. } \frac{1}{4} u \text{ sec. } \frac{1}{8} u \text{ sec. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots \text{sec. } \frac{1}{2^n} u.$$

Tornando pertanto al valore del prodotto de' coseni, cioè $\frac{\text{sen. } u}{2^n \text{ sen. } \frac{1}{2^n} u}$, e riflettendo, che il seno di un arco infinitesimo non differisce dall' arco se non per una quantità infinitesima rispetto all' arco medesimo, ne viene in conseguenza, che quando sia n un numero infinito, come lo è nel presente Problema, diventa sen. $\frac{1}{2^n} u = \frac{1}{2^n} u$, e quindi 2^n sen. $\frac{1}{2^n} u = u$.

Perlochè sarà $\frac{\text{sen. } u}{u} = \text{cos. } \frac{1}{2} u \text{ cos. } \frac{1}{4} u \text{ cos. } \frac{1}{8} u \text{ cos. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots$ cos. $\frac{1}{2^n} u$. E poichè si è trovato il raggio vettore ultimo

$$AH = \frac{z}{\text{cos. } \frac{1}{2} u \text{ cos. } \frac{1}{4} u \text{ cos. } \frac{1}{8} u \text{ cos. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots \text{cos. } \frac{1}{2^n} u},$$

fatta la sostituzione di $\frac{\text{sen. } u}{u}$ in luogo del denominatore, si raccoglie

$AH = \frac{zu}{\text{sen. } u}$. Quindi è manifesto, che il punto H ricercato si determina col pigliare da A sopra la indefinita AQ una quarta proporzionale AH dopo il seno dell' arco di cerchio, che misura l' angolo compreso da un raggio vettore qualunque e dalla AQ, dopo quest' arco istesso, e dopo il detto

raggio vettore. Se pertanto il dato raggio vettore *AC* si farà $= \theta$, e l' arco, che misura il dato angolo *CAQ*, si porrà $= \phi$, se ne ritrarrà per *AH* il valore tutto noto $\frac{\theta\phi}{\text{sen.}\,\phi}$. Dal che apparisce, che l' invenzione del punto H dipende dalla rettificazione del cerchio, ma ne dipende in un modo così poco complicato, che non può cagionare a chicheſſia il minimo imbarazzo, maſſime avendoſi alla mano le Tavole calcolate delle lunghezze di tutti gli archi circolari in parti del raggio, come ſono per eſempio quelle, che pubblicò ultimamente il Sig. *Schulze* in Berlino.

Il ſecondo punto del Problema, concernente l' equazione della Curva, non ammette più ora veruna difficoltà. Imperciocchè eſſendoſi trovato generalmente $AH = \frac{zu}{\text{sen.}\,u}$, ſe ſi prende la ſteſſa *AH* uguale alla quarta proporzionale dopo le tre date quantità, come ſi è avvertito, diviene ancor eſſa nota e determinata, e però uguale ad una quantità data, che diraſſi per eſempio a. Laonde l' equazione *polare* della Curva ſarà $\frac{zu}{\text{sen.}\,u} = a$, ovvero $z = \frac{a\,\text{sen.}\,u}{u}$, equazione di tal ſemplicità ed eleganza, che ben poche curve traſcendenti godono di queſto vantaggio. E queſta equazione è poi quella ſteſſa, che io trovai già competere alla Curva, la quale rappreſenta il viaggio, che va facendo il centro di gravità della circonferenza del cerchio deſcritto col raggio $= a$, quando dalla medeſima ſi vanno togliendo ſucceſſivamente altri, ed altri archi ſino a ridurla al nulla, ſiccome ho eſpoſto nel Libro citato.

Intanto dalla detta equazione ſi raccoglie immediatamente, che i raggi vettori della Curva ſtanno tra loro nella ragione compoſta della diretta de' ſeni degli archi, che miſurano gli angoli formati da eſſi colla retta indefinita data di poſizione, e dell' inverſa degli archi iſteſſi. Così i due raggi vettori *AD*, *AF* ſtanno tra sè direttamente come i ſeni degli archi miſuranti gli angoli *DAQ*, *FAQ*, ed inverſamente come i detti archi. Si raccoglie pur anco, che ſvanendo l' angolo del raggio vettore e dell' indefinita *AQ*, e però diven-

tando

tando ſen. $u = u$ (poichè il ſeno dell' arco evaneſcente è ſempre uguale all' arco, come è noto dalla Geometria Infiniteſimale); ſi otterrà $y = a$, vale a dire il raggio vettore indeterminato acquiſta la poſizione della indefinita AQ cadendo ſopra eſſa, e ſi cangia nella retta dianzi trovata AH.

La deſcrizione di queſta Curva per punti quanto ſi voglia vicini ſi effettua ſpeditamente, conceſſa la rettificazione degli archi circolari, la lunghezza de' quali in parti del raggio ſi trova già calcolata nelle Tavole di Berlino da 1 ſino a 360 gradi. Condotta per eſempio ſotto qualunque angolo con AQ una retta indefinita AN, ſi determina ſu di eſſa il punto D ſpettante alla Curva con prendere AD quarta proporzionale dopo l' arco, che miſura l' angolo DAQ, dopo il ſuo ſeno, e dopo la retta già prima determinata AH. In tal modo ſi troveranno quanti altri punti della Curva ci piacerà.

Per poco, che ſi conſideri l'equazione, ſi vede pur anco, che la Curva ſarà compoſta di due rami perfettamente ſimili ed uguali di qua e di là dalla AH, la quale li divide per metà. Imperciocchè la medeſima coſtruzione, che ſi è fatta alla ſiniſtra di AH, ſi fa parimenti alla deſtra, dove gli angoli negativi de' raggi vettori colla AH, e gli archi pur negativi, che ne ſono la miſura, non alteran punto nell' equazione $z = \frac{a \text{ ſen. } u}{u}$ i valori di z, i quali ſotto angoli uguali da una parte e dall' altra di AH ſi ritrovano riſpettivamente gli ſteſſi a motivo del valor negativo così dell' arco, come del ſuo ſeno alla deſtra di AH, il che rende ſempre poſitivo anche da queſta parte il valore di z, e ſempre uguale al ſuo corriſpondente ſotto il medeſimo angolo dalla parte oppoſta.

La forma di queſta Curva ha una gran ſomiglianza alla figura d' un cuore, ed è evidente, che reſta diviſa per metà dall' aſſe AH, il quale ſcuopreſi eſſere il *maſſimo* fra tutti i raggi vettori: in fatti ſe il differenziale dell' equazione

$z = \frac{a \text{ ſen. } u}{u}$ ſi fa uguale a zero, riſulta

$dz = \frac{audu \text{ coſ. } u - adu \text{ ſen. } u}{u^2} = 0$, vale a dire $u = \frac{\text{ſen. } u}{\text{coſ. } u} =$

tang. u, dal che è facile l' inferire $u = 0$, cioè il raggio vettore allora diviene *maſſimo* quando cade ſopra la retta indefinita AQ.

E' pur facile il vedere, che l'aſſe AH taglia la curva perpendicolarmente in H; il che ſi ſcuopre anche col calcolo differenziale, giacchè ſe nella formola $\frac{z^2 du}{dz}$ per la ſottangente delle curve riferite al fuoco ſi ſoſtituiſcono i valori opportuni ricavati dall' equazione della Curva, trovaſi la ſottangente $= \frac{a \text{ ſen. } u^2}{u \text{ coſ. } u - \text{ſen. } u}$, che nel ſuppoſto di $u = 0$ diventa $= \frac{0}{0}$; e ſe per evitare queſto valore indeterminato ſi uſa il noto ripiego di prendere il differenziale del numeratore, e dividerlo pel differenziale del denominatore, ſicchè abbiaſi

$$\frac{2adu \text{ coſ. } u \text{ ſen. } u}{du \text{ coſ. } u - udu \text{ ſen. } u - du \text{ coſ. } u} = \frac{2a \text{ coſ. } u \text{ ſen. } u}{- u \text{ ſen. } u} = \frac{2a \text{ coſ. } u}{- u},$$

naſce nel caſo di $u = 0$ la ſottangente $= \frac{-2a \text{ coſ. } u}{u} = \infty$. E però la ſottangente, cioè la perpendicolare condotta da A al raggio vettore AH, ed incontrata dalla tangente, che ſi guida da H, riſultando infinita, ſi fa manifeſto, che la tangente in H è parallela alla ſottangente, e conſeguentemente perpendicolare al raggio vettore AH, che è quanto dire il raggio vettore AH, oſſia l' aſſe della Curva è ad eſſa normale in H.

Si rende inoltre manifeſto, che l' aſſe iſteſſo AH, che da una parte taglia perpendicolarmente la Curva in H, dall' altra rieſce tangente di ambedue i rami della Curva in A, ciò che appariſce dal valore della ſottangente $\frac{a \text{ ſen. } u^2}{u \text{ coſ. } u - \text{ſen. } u}$, che nel caſo di u eguale alla ſemicirconferenza del cerchio ſi annulla, e moſtra in conſeguenza eſſere AH tangente de' due rami della Curva in A.

La forma della Curva indica fralle ordinate ortogonali all' aſſe AH doverſene trovare una *maſſima* IO, e queſta ſi determina facilmente nel modo ſeguente: Eſſendo $AI = z$,

$IAQ = u$, ne viene $IO = z$ sen. $u = \frac{a \text{ sen. } u^2}{u}$, e l' aſciſſa $AO = z$ coſ. $u = \frac{a \text{ sen. } u \text{ coſ. } u}{u}$. Preſo pertanto il differenziale del valore di IO, ed uguagliato a zero; riſulta $\frac{2audu \text{ sen. } u \text{ coſ. } u - adu \text{ sen. } u^2}{u^2} = 0$, e quindi $u = \frac{\text{sen } u}{2 \text{ coſ. } u} = \frac{1}{2}$ tang. u. Laonde il punto della Curva, al quale corriſponde l' ordinata maſſima, reſta determinato con guidare un raggio vettore AI, il quale faccia coll' aſſe un tal angolo IAH, che l' arco miſuratore di queſt' angolo ſia uguale alla metà della ſua tangente. Che ſe il valore di $u = \frac{\text{sen. } u}{2 \text{ coſ. } u}$ viene ſoſtituito ne' valori dell' ordinata OI del raggio vettore AI, e dell' aſciſſa AO, appariſce $OI = 2a$ sen. u coſ. u, $AI = 2a$ coſ. u, $AO = 2a$ coſ. u^2, valori tutti ſempliciſſimi e dipendenti dall' arco u. Ora il ritrovare un angolo IAH, il di cui arco miſuratore u ſia la metà della tangente, è un Problema di facile indagine, il quale ſi ſcioglie coll' ordinaria regola di falſa poſizione nel ſeguente modo.

Suppoſto, che non ſi abbiano alla mano le Tavole di Berlino degli archi ridotti in parti del raggio, ſi può ſubito ſupplirvi mediante la formola $u = \frac{n\pi}{\gamma}$, nella quale π indica la lunghezza della ſemicirconferenza del cerchio deſcritto col raggio $= 1$, u la lunghezza dell' arco propoſto, n il numero de' gradi, minuti, ecc. di queſt' arco, γ il numero de' gradi, minuti, ecc. della ſemicirconſerenza π. Imperciocchè nella formola $u = \frac{n\pi}{\gamma} = \frac{n}{\gamma : \pi}$ dopo aver ridotti n e γ in numeri omogenei, cioè ambedue in minuti primi, o in ſecondi, o ecc. baſta ſottrarre il logaritmo di π, cioè 0, 4971499 dal logaritmo del numero γ, e ſottrarre nuovamente queſto reſiduo dal logaritmo del numero n, e ſi ottiene il logaritmo della lunghezza dell' arco propoſto u. Ciò premeſſo, paſſo a fare le ſeguenti ipoteſi per giugnere all' e-

quazione $2u = \text{tang.}\ u$, preso sempre n per esprimere il numero di gradi, ecc. dell' arco u:

Ipotesi I.

$$\begin{array}{rl} & n = 60^\circ \\ \log.\ 2n & = 2,\ 0791812 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 1,\ 7581226 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3210586 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 2385606 \\ \hline \text{Err.} & + 0,\ 0824980 \end{array}$$

Ipotesi II.

$$\begin{array}{rl} & n = 70^\circ \\ \log.\ 2n & = 2,\ 1461280 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 1,\ 7581226 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3880054 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 4389341 \\ \hline \text{Err.} & - 0,\ 0509287 \end{array}$$

Ipotesi III.

$$\begin{array}{rl} & n = 66^\circ \\ \log.\ 2n & = 2,\ 1205739 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 1,\ 7581226 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3624513 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 3514169 \\ \hline \text{Err.} & + 0,\ 0110344 \end{array}$$

Ipotesi IV.

$$\begin{array}{rl} & n = 67^\circ \\ \log.\ 2n & = 2,\ 1271048 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 1,\ 7581226 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3689822 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 3721481 \\ \hline \text{Err.} & - 0,\ 0031659 \end{array}$$

Facendo adunque come la somma di questi due ultimi Errori ad uno di essi, così la differenza delle Ipotesi al quarto proporzionale, si giugne pel valore di n ai due limiti più vicini $66^\circ.\ 46'$, e $66^\circ.\ 47'$. Pianto quindi due altre ipotesi:

Ipotesi V.

$$\begin{array}{rl} & n = 66^\circ.\ 46' = 4006' \\ & 2n = 8012' \\ \log.\ 2n & = 3,\ 9037409 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 3,\ 5362739 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3674670 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 3672499 \\ \hline \text{Err.} & + 0,\ 0002171 \end{array}$$

Ipotesi VI.

$$\begin{array}{rl} & n = 66^\circ.\ 47' = 4007' \\ & 2n = 8014' \\ \log.\ 2n & = 3,\ 9038493 \\ -\log.\ \frac{\gamma}{\pi} & = 3,\ 5362739 \\ \hline \log.\ 2u & = 0,\ 3675754 \\ \log.\ \text{tang.}\ n & = 0,\ 3675985 \\ \hline \text{Err.} & - 0,\ 0000231 \end{array}$$

Laonde facendo come la somma 0, 0002402 degli Errori all' Errore 0, 0002171, così la differenza 1', ovvero 60'' delle Ipotesi al quarto proporzionale, questo si trova $= 54''$, $14'''$, che aggiunto a $66°$, $46'$ fa conoscere l'angolo ricercato di $66°, 46', 54'', 14'''$, e la sua tangente $= 2, 3311220$, ossia due volte e un terzo il raggio, o seno tutto.

Finalmente l' equazione $z = \frac{a \text{ sen. } u}{u}$ esaminata a dovere ci fa tosto scorgere, che la Curva aver dee un numero infinito di Foglie intorno al punto *A*, una sempre minore dell' altra senza fine, le quali vanno per ultimo a terminare e concentrarsi in un solo punto. Ciò si deduce dagl' infiniti valori dell' arco u, incominciando da zero fino all' infinito tanto dalla parte de' positivi, che da quella de' negativi, cosicchè denominati u gli archi che non sorpassano la prima periferia 2π, i detti valori vengono espressi dalla serie $\pm u$, $\pm 2\pi \pm u$, $\pm 4\pi \pm u$, $\pm 6\pi \pm u$, $\pm 8\pi \pm u$, $\pm 10\pi \pm u$, ecc. *in infinito*.

Una Curva, che per la somiglianza colle figure d'un Cuore, viene denominata *Cardioide*, trovasi descritta nell' Enciclopedia Inglese all' articolo *Cardioid*, ma essendo essa algebraica, come la sua equazione lo dà a divedere, differisce essenzialmente dalla nostra.

Descrivesi quella con prolungare fuori del cerchio le corde, che partono tutte dal medesimo punto della sua circonferenza, e con prendere le parti esterne sempre uguali al diametro del cerchio. Le estremità delle corde con tal legge prolungate costituiscono il perimetro della *Cardioide*. Da una costruzione così semplice si ricava con estrema facilità l'equazione algebraica di questa Curva, la quale ascende al quarto grado.

Vengo ora all' altra dimanda, che ella mi fa intorno alle due famose Proposizioni, che nella dottrina delle Serie Infinite, e nel Calcolo Integrale trovansi da molti o semplicemente enunciate, o anche dimostrate, delle quali io le dissi, che ben lungi dall' ammetterle per vere io per l' opposto credeva di poterne provare rigorosamente la falsità.

La prima di queste proposizioni viene espressa così:
Se il numero, e, *che ha per logaritmo iperbolico l' unità*, *vie-*

ne elevato alla potenza, che ha per esponente la serie reciproca de' numeri primi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc. *in inf., ne nasce* $e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{ecc.}}$ *eguale all' infinito armonico* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ ecc.

Si suole dimostrare una tale proposizione, chiamando A la serie reciproca de' numeri primi, B la reciproca de' quadrati di questi numeri, cioè $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+$ ecc., C la reciproca de' loro cubi, D la reciproca de' loro biquadrati, e così appresso, e siccome è noto dalla Teoria delle Serie, essere $A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ ecc. $=\log.\frac{2}{1}+\log.\frac{3}{2}+\log.\frac{5}{4}+\log.\frac{7}{6}+\log.\frac{11}{10}+\log.\frac{13}{12}+\log.\frac{17}{16}+$ ecc. $=\log.\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{ecc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ \text{ecc.}}$; conseguentemente passando dai logaritmi ai numeri nasce $e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{ecc.}}$ $=\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{ecc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ \text{ecc.}}$. Ora questa frazione, la quale ha per numeratore il prodotto infinito di tutti i numeri *primi*, e per denominatore il prodotto di tutti quelli, che mancano dell' unità dai numeri *primi*, è appunto uguale alla serie reciproca de' numeri naturali $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ ecc. in inf.

Imperciocchè presa $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+$ ecc., sarà $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+$ ecc., e sottratta questa seconda dalla prima, resta $\frac{1}{2}x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc.

dalla quale sono esclusi tutti i denominatori pari, cioè divisibili per 2. Tolgo da questa il suo terzo, cioè $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ ecc., ed ho per resto $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}x=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc., da cui sono esclusi tutti i denominatori divisibili per 2, e 3. Da questa levo il quinto, ossia $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{35}+$ ecc., ed ottengo il residuo $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}x=1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc., dove non s' incontra più alcun denominatore divisibile per 5. A questo modo escludendo tutti i termini divisibili per 7, per 11, per 13, per 17, e per qualunque altro numero *primo*, si arriva finalmente all'ugualità $\frac{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ \text{ecc.}}{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{ecc.}}x=1$, ovvero

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{ecc.}$$

$$=\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{ecc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ \text{ecc.}}$$

. Per la qual cosa la quantità trascendente $e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{ecc.}}$ trovata uguale alla frazione infinita $\frac{2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13.\ 17.\ \text{ecc.}}{1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 10.\ 12.\ 16.\ \text{ecc.}}$ sarà pur uguale all' infinito armonico $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ ecc.

Siccome pertanto è già noto dalla dottrina delle Serie, che la Serie reciproca de' numeri primi, vale a dire A ha un valore infinito, e la somma di $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ ecc. in inf. non ha che un valore finito, ed anche assai piccolo; perciò trascurando la somma $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ ecc. in confronto di A, rispetto a cui essa svanisce, nasce per ultimo l' equa-

zione $e^{A} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + ecc.} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$ ecc., che è la propoſta.

Queſto ſottile ragionamento pecca nell' ultima parte, dove ſtabiliſce, poterſi traſcurare la ſomma $\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E +$ ecc. in confronto di A, perchè quella finita, e queſta infinita. Il gran principio dell' evaneſcenza della quantità finita riſpetto all' infinita non può aver più luogo, ed induce infallibilmente in errore, allorchè l' infinito congiunto al finito forma l' eſponente d' una data quantità, per eſempio e nel caſo preſente. Allora (chiamato n il finito) è tanto lontano, che $e^{\infty + n}$ ſia lo ſteſſo, che e^{∞}, che anzi quello ſta a queſto nella ragione di $e^{n} : 1$, cioè in una ragione comunque ineguale finattantochè n ſeguita ad eſſere un numero finito ancorchè piccioliſſimo, non divenendo uguale una tal proporzione ſe non nel caſo di $n = 0$. Ciò ſi vede ancor meglio dal valore infinito, che ha la differenza delle due predette eſpreſſioni, la qual differenza è $= e^{\infty + n} - e^{\infty} = e^{\infty}(e^{n} - 1)$, valore viſibilmente infinito fino a che n riman qualche coſa. E' dunque evidentemente falſo il celebre Teorema ſopra enunciato, e comunemente adottato per vero.

L' altra propoſizione, che io trovo falſa, è il famoſo Teorema, che s' incontra ne' trattati più eſteſi di Calcolo Integrale, in quella parte più delicata e profonda, che riguarda l' integrazione delle formole differenziali a *parziali differenze*. Il Teorema ſi ſuol eſporre così:

Se la funzione Z *delle variabili* x, y, u, ecc. *è tale, che debba eſſer nulla* 1°. *nell' ipoteſi di* y *eguale ad una coſtante* a, *tutte le differenze parziali di* Z, *eccetto* $\frac{dZ}{dy}$, *ſaranno neceſſariamente nulle nella medeſima ipoteſi*. 2°. *Se queſta funzione è tale, che eſſa debba eſſer nulla nell' ipoteſi di* y $= a$, *e di* x $=$ b, *tutte le differenze parziali di* Z *eccetto* $\frac{dZ}{dy}$, *e* $\frac{dZ}{dx}$ *ſaranno*

faranno neceſſariamente nulle nella ſteſſa ipoteſi. Quindi, ſe eſſendo Mdy *un termine del differenziale eſatto di* Z, *la formola integrale* ∫Mdy (*fatta l' integrazione per rapporto ad* y *ſolamente*) *è nulla nel ſuppoſto di* y *uguale ad una coſtante, queſt' altra formola integrale* $\int \frac{dM}{dx} dy$, *che è il coefficiente di* dx *nel differenziale della prima, è neceſſariamente nulla nello ſteſſo ſuppoſto*,

Per incominciare ora a dimoſtrare falſa la prima parte del Teorema, io oſſervo, che non può la funzione Z annullarſi nella ſuppoſizione di $y = a$ ſenza avere la forma $(y - a)^n P$, eſſendo P un' altra funzione delle variabili x, y, u, ecc. Se pertanto ſi prendono le differenze parziali $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{du}$, ecc., le quali non ſono altro che $\frac{dP}{dx}(y - a)^n$, $\frac{dP}{du}(y - a)^n$, ecc. ſi vede chiaro, che tali differenze ſi annullano ancor eſſe in quell' ipoteſi di $y = a$. Ma per l' oppoſto la differenza parziale $\frac{dZ}{dy}$ in vece di perſiſtere ad eſſere qualche coſa, come eſige il Teorema, diventa nulla eſſa pure in infiniti caſi: imperciocchè trovaſi $\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy}(y - a)^n + nP(y - a)^{n-1}$, la quale è manifeſtamente nulla tutte le volte che n ſupera l' unità; il che moſtra l' inſuſſiſtenza della prima parte del Teorema.

Quanto alla ſeconda parte, affinchè la funzione Z attualmente ſvaniſca nell' ipoteſi di $y = a$, e di $x = b$, doverà ella avere la forma ſeguente $Z = (y - a)^n P + (x - b)^m Q$, dove P e Q ſono funzioni diſtinte delle ſteſſe variabili x, y, u, ecc. Preſa ora la differenza parziale $\frac{dZ}{du}$, trovaſi queſta $= \frac{dP}{du}(y - a)^n + \frac{dQ}{du}(x - b)^m$, che è manifeſtamente $= 0$ nella ſuppoſizione di $y = a$, e di $x = b$; e così ogn' altra differenza parziale preſa per rapporto a qualunque variabile diverſa da y, e x, ſi troverà ſempre nulla in quella ſuppo-

ſizione. Ma ben lungi, che le differenze parziali $\frac{dZ}{dy}$, $\frac{dZ}{dx}$ non ſi annullino in quel ſuppoſto, come vuole il Teorema, trovaſi, che ſi annullano realmente ancor eſſe in infiniti caſi. Ed in fatti $\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy}(y-a)^n + nP(y-a)^{n-1}$ $+ \frac{dQ}{dy}(x-b)^m$, e $\frac{dZ}{dx} = \frac{dQ}{dx}(x-b)^m + mQ(x-b)^{m-1}$ $+ \frac{dP}{dx}(y-a)^n$; e queſte due eſpreſſioni ſono evidentemente nulle nell' ipoteſi di $y=a$, e di $x=b$ tutte le volte, che gli eſponenti m, n ſuperano l' unità, vale a dire in infiniti caſi; contro ciò, che ſi aſſeriſce nella ſeconda parte del Teorema.

Finirò con riſpondere all' ultima ſua dimanda di comunicarle una nuova dimoſtrazione del bel Teorema concernente l' uguaglianza fra il logaritmo iperbolico del numero 2, e la ſerie armonica a termini infiniteſimi, non parendole pienamente ſoddisfacenti le dimoſtrazioni da lei vedute. Ecco dunque il Teorema:

Eſſendo $n=\infty$, *dico, che* $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}$ $+ \frac{1}{n+5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \log. 2$.

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſviluppo de' termini della ſerie armonica dà le ſeguenti equazioni.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{2^2}{n^3} - \frac{2^3}{n^4} + \frac{2^4}{n^5} - \frac{2^5}{n^6} + \frac{2^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{3^2}{n^3} - \frac{3^3}{n^4} + \frac{3^4}{n^5} - \frac{3^5}{n^6} + \frac{3^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4^2}{n^3} - \frac{4^3}{n^4} + \frac{4^4}{n^5} - \frac{4^5}{n^6} + \frac{4^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+5} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{5^2}{n^3} - \frac{5^3}{n^4} + \frac{5^4}{n^5} - \frac{5^5}{n^6} + \frac{5^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+6} = \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{6^2}{n^3} - \frac{6^3}{n^4} + \frac{6^4}{n^5} - \frac{6^5}{n^6} + \frac{6^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

ecc.

Dunque diſtribuiti ordinatamente i termini, che moltiplicano le potenze reciproche di n, ſe ne ritrarrà

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n}(1+1+1+1+1+1+1+\text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^2}(1+2+3+4+5+6+7+\text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+\text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+\text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4+7^4+\text{ecc.}$$

$$- \frac{1}{n^6}(1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5+\text{ecc.})$$

$+$ ecc.

E poichè è già nota dall' Algebra comune l' eſpreſſione della ſomma di qualunque ſerie compoſta delle potenze intere de' numeri naturali continuati quanto ſi vuole, perciò ſoſtituendo ſiffatte eſpreſſioni in luogo delle riſpettive ſerie precedenti, ritrovaſi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n}(n) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \frac{1}{n^4}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{n^5}\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right) - \frac{1}{n^6}\left(\frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^2}{12}\right) + \text{ecc.}\ldots$$

Ma eſſendo n infinito, ſvaniſcono nel ſecondo membro di

queſt' equazione le potenze di n inferiori in confronto delle ſuperiori. Dunque ſarà

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}.n-\frac{1}{n^2}.\frac{n^2}{2}+\frac{1}{n^3}.\frac{n^3}{3}-\frac{1}{n^4}.\frac{n^4}{4}+\frac{1}{n^5}.\frac{n^5}{5}-\frac{1}{n^6}.\frac{n^6}{6}+\text{ecc.}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\text{ecc.}$$

Ora la dottrina de' logaritmi inſegna eſſere

$$\log.(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\text{ecc.}$$

per modo che fatto $x=1$, proviene $\log. 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{ecc.}$ Per conſeguenza la ſerie armonica propoſta ſarà $=\log. 2$.

Con queſto ſteſſo metodo io arrivo a dimoſtrare, che la ſerie armonica $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\ldots\ldots+\frac{1}{3n}$ è uguale a $\log.\frac{3}{2}$; e parimente $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\ldots\ldots+\frac{1}{4n}=\log.\frac{4}{3}$; e così pure $\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\ldots\ldots+\frac{1}{5n}=\log.\frac{5}{4}$; per modo che ci ſi offre queſt' elegante proſpetto.

Serie	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$
Somme	$\log.\infty=\log.\frac{1}{0}$	$\log.\frac{2}{1}$
Serie	$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{4n}$
Somme	$\log.\frac{3}{2}$	$\log.\frac{4}{3}$
Serie	$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{5n}$	$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{6n}$
Somme	$\log.\frac{5}{4}$	$\log.\frac{6}{5}$
Serie	$\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{7n}$	ecc.
Somme	$\log.\frac{7}{6}$	ecc.

Da ciò ne deriva, che ſe ſi prende λ eguale ad un numero intero affermativo qualunque, la ſerie armonica $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda n}$ rieſce eguale alla ſomma de' logaritmi $\log.\frac{2}{1}+\log.\frac{3}{2}+\log.\frac{4}{3}+\log.\frac{5}{4}+\log.\frac{6}{5}+\log.\frac{7}{6}\ldots\ldots+\log.\frac{\lambda-1}{\lambda-2}+\log.\frac{\lambda}{\lambda-1}$

$$=\log.\frac{2.3.4.5.6.\ldots\ldots.\lambda-1.\lambda}{1.2.3.4.5.\ldots\ldots.\lambda-2.\lambda-1}=\log.\lambda.$$

Altre riflesſioni nuove e intereſſanti potrebbono qui farſi intorno alle proprietà di queſte ſerie; ma per non eſſerle tedioſo io le rimetto alla ſua ſagacità.

SOPRA LA PRESSIONE
DE' FLUIDI

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Università di Pavia.

Esaminando la pressione de' fluidi contro i corpi immersi, o contro le pareti de' recipienti, mi venne fatto di osservare, che nel Cilindro, e nella Sfera ad esso inscrivibile, se entrambi si sommergono nel fluido sino alla sommità, o se internamente scavandoli si riempie la loro capacità, risulta nelle pressioni esercitate dal fluido contro i detti due corpi quella medesima proporzione sesquialtera, che Archimede scoprì così nelle loro solidità, come nelle superficie. Quindi argomentai, non dover essere inutile o sterile l'idea di ridurre a formole generali la pressione de' fluidi ad effetto di ricavarne secondo la varia forma de' corpi sommersi, o de' vasi riempiti que' risultati più o meno curiosi e rimarchevoli, cui il soggetto sembra promettere. Restringendomi presentemente in questo breve Scritto ai fluidi *omogenei e incompressibili* verrò esponendo succintamente il mio divisamento in questa importante materia senza assumere dall' Idrostatica altro principio fuori di quello altronde noto nelle molecole fluide per esperienza, vale a dire l'uguaglianza di pressione per ogni verso e secondo tutte le direzioni.

LEMMA.

Un fluido, che riempie un tubo infinitamente sottile *FECD* (*Fig.* 1.) o cilindrico o prismatico avente i lati perpendicolari alla base, e tenuto in una positura comunque obliqua all' orizzonte *AD*, preme il fondo o la base *CD* con uno sforzo equivalente al peso d'un prisma dello stesso fluido, che

ha per base la stessa *CD*, e per altezza la verticale *FA* terminata dall' orizzontale *AD*.

Dimostrazione.

Sia *M* il centro di gravità del filo d' acqua contenuto nel tubo infinitamente sottile *FECD*, e colla verticale *MP* condotta dal centro di gravità si rappresenti il peso di esso filo, e si risolva lo sforzo *MP* ne' due laterali *MR* perpendicolare alla base *CD*, ed *MN* perpendicolare al lato *FD*. Ciò posto è manifesto, che il filo d' acqua non preme il fondo *CD* se non collo sforzo rappresentato da *MR*, posciachè l' altro espresso da *MN* è tutto impiegato a premere le pareti del tubo. Starà dunque il peso del fluido, cioè il prodotto del suo volume nella gravità specifica *g*, alla pressione *p* esercitata sul fondo *CD*, come sta *MP* ad *MR*, ovvero per la similitudine de' triangoli *PMR*, *FAD*, come *FD* ad *FA*, cioè $FD : FA :: DC \times FD \times g : p$; e perciò $p = DC \times FA \times g$. Il che era ecc.

Scolio.

E' di per sè chiaro, che qui si prescinde da quella qualunque aderenza, che le molecole del fluido aver possono colle pareti del tubo, come pure da quella forza, che ne' tubi minimi o *capillari* è già conosciuta, la qual opponendosi alle comuni leggi dell' Idrostatica altera e diversifica la pressione del fluido quando con diminuirne l' energia, quando con sospenderne l' esercizio.

TEOREMA I.

In un vaso ADQB *di qualunque forma* (*Fig.* 2.) *pieno di acqua fino in* BA, *la pressione, che soffre qualunque minima particella, o elemento delle sue pareti, equivale al peso d' un prisma d' acqua avente per base lo stesso elemento, e per altezza la sua profondità sotto il piano di livello* AB.

DIMOSTRAZIONE.

L' elemento *DC* del vaſo può avere tre differenti poſizioni perchè 1. un tubo priſmatico perpendicolarmente applicato al detto elemento può incontrare il piano di livello *BA* ſenza paſſare pel vaſo, come ſi vede nel tubo *DCEF*: 2. può eſſere parallelo al pian di livello, come *CDIL*: 3. può concorrere col piano di livello, paſſando però attraverſo il vaſo, ſiccome accade nel tubo *CDRS*.

Caſo 1.° Stando l'acqua così nel tubo *CDFE*, come nel vaſo comunicante *AQB* alla medeſima altezza, o allo ſteſſo livello *BAFN*, ed eſſendo tutto equilibrato, ne viene in conſeguenza, che il luogo *DC* è tanto premuto eſteriormente dall'acqua del tubo *DCFE*, quanto lo è internamente da quella del vaſo, e che però anche interiormente è premuto con uno sforzo, che vale il peſo d' un priſma d' acqua compreſo ſotto la baſe *CD* e ſotto un' altezza uguale alla diſtanza verticale di *CD* dal pianò di livello.

Caſo 2.° Si pieghi il tubo orizzontale *CI* in un altro verticale *LN* che arrivi al piano di livello. Nel tubo *ONCD*, e nel vaſo comunicante *AQB* la ſuperficie ſuperiore dell'acqua ſtagnante e tranquilla occupa lo ſteſſo piano orizzontale. Laonde *CD* è premuto eſteriormente dall' acqua contenuta nel tubo ricurvo *NOCD* colla ſteſſa energia, ond' è premuto internamente dall' acqua del vaſo *AQB*. Ma egli è evidente, che *CD* è premuto collo ſteſſo sforzo che *LI*, ovvero il ſuo uguale *LM*, e che *LM* porta tutto il peſo dell' acqua contenuta in *MO*, che lo preme verticalmente, il qual peſo appartiene ad un volume d'acqua $= LM \times MN = CD \times MN$. Dunque con queſto ſteſſo sforzo è altresì premuto interiormente *CD* dall' acqua del vaſo.

Caſo 3.° Si adatti al vaſo *AQB* un altro vaſo *BCUT* di qualunque figura per modo che entrambi ſi tocchino in *CD*. L' acqua arriverà in ambedue allo ſteſſo livello, e *CD* ſarà premuto egualmente così dall' acqua del primo vaſo al di dentro, come da quella del nuovo al di fuori, ed a queſta ſeconda preſſione equivale pel caſo 1°. quella dell'acqua nel tubo *CDRS*, cioè a dire il peſo d'un volume priſmatico d'acqua,

qua, che ha *CD* per base, e per altezza la distanza del piano di livello. Il che era ecc.

TEOREMA II.

In un vaso di qualunque figura ACDB *(Fig. 3. e 4.) la pressione dell' acqua sul fondo orizzontale* CD *vale il peso d'un prisma d'acqua avente il fondo stesso per base, e la sua profondità sotto il pian di livello per altezza.*

DIMOSTRAZIONE.

Ciascun elemento del fondo *CD* è premuto col peso d' un volume d' acqua, che si ha moltiplicando l' elemento per la sua profondità sotto il piano di livello *AB*, ovvero per la profondità del fondo stesso sotto quel piano. Dunque tutto il fondo porta una pressione equivalente al peso d' una mole di acqua eguale al prodotto del fondo per la sua distanza dalla superficie superiore dell' acqua. Il che era ecc.

Di qui si comprende come una picciolissima porzione d'acqua possa esercitare una pressione enorme sopra una data superficie.

TEOREMA III.

La pressione, che esercita un fluido omogeneo contro una superficie qualunque, ha per misura il peso d' un volume di fluido uguale al prodotto di questa superficie per la distanza del suo centro di gravità dal pian di livello.

DIMOSTRAZIONE.

La pressione totale del fluido sopra una superficie qualunque, e comunque situata risulta dalla somma di tutte le pressioni sopra le parti infinitesime, ovvero gli elementi della stessa superficie, che è quanto dire dalla somma de' prodotti di questi elementi, moltiplicati ciascuno per la sua distanza dal pian di livello. Ma per la natura del centro di gravità, la somma de' prodotti di ciascun elemento della superficie per

la ſua diſtanza da un piano fiſſo s' agguaglia al prodotto della ſuperficie intera moltiplicata per la diſtanza del ſuo centro di gravità dallo ſteſſo piano. * Dunque la preſſione contro la ſuperficie totale è miſurata dal peſo di una mole di fluido prodotta dal moltiplicare la ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla ſuperficie ſuperiore del fluido. Il che era ecc.

Quanto in appreſſo diremo circa la preſſione interna contro le pareti de' vaſi dall' acqua contenutavi vale ugualmente, com' è manifeſto, per la preſſione eſterna contro le ſteſſe pareti ne' vaſi, o corpi immerſi nell' acqua, ſuppoſta uguale nell' un caſo e nell' altro la riſpettiva diſtanza degli elementi delle pareti dal pian di livello. Dunque

I.

Un vaſo priſmatico pieno d' acqua tenuto colla baſe orizzontale ſoffre nella ſuperficie delle faccie laterali una preſſione uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto della ſuperficie laterale moltiplicata per la metà dell' altezza del priſma. Ciò è evidente dall' eſſere il centro di gravità della ſuperficie del priſma alla metà della ſua altezza.

II.

Quindi ſi ricava, che la ſuperficie laterale d' un vaſo cubico pieno d' acqua prova una preſſione, che vale due volte il peſo dell' acqua; e che aggiuntavi la preſſione contro la baſe, la preſſione totale ha per miſura il triplo del peſo dell' acqua.

---

* Il Teorema della Statica è queſto: ſieno più peſi o maſſe M, M', M'', M''', ecc., e le riſpettive diſtanze dei centri di gravità di eſſe maſſe da un piano fiſſo ſieno D, D', D'', D''', ecc., e finalmente la diſtanza del loro comun centro di gravità dal medeſimo piano ſia Δ; ſarà ſempre la ſomma de' prodotti di ciaſcuna maſſa moltiplicata per la ſua riſpettiva diſtanza dal piano fiſſo uguale al prodotto della ſomma di dette maſſe moltiplicata per la diſtanza del comun centro di gravità dal piano medeſimo, cioè ſarà $MD + M'D' + M''D'' + M'''D''' +$ ecc. $= (M + M' + M'' + M''' +$ ecc.$)\,\Delta$.

III.

In un vaso piramidale pieno d' acqua, tenuto colla base orizzontale all' ingiù, e colla cima rivolta all' insù per modo che il pian di livello sia il piano orizzontale che passa per la cima, la pressione contro la superficie laterale ha per misura il peso di tant' acqua, quanta se ne ha con moltiplicare la detta superficie per due terzi dell' altezza della piramide. In fatti il centro di gravità di quella superficie sta a due terzi dell' altezza della piramide, computando dalla cima.

IV.

Da ciò s' inferisce, che nella stessa piramide sta *la pressione contro la superficie a quella contro la base, come stanno due terzi della superficie alla base.*

V.

Che se il vaso piramidale si tiene colla base orizzontale all' insù, e colla cima rivolta all' ingiù, allora *la pressione contro la superficie è misurata dal peso di quel volume d' acqua, che risulta moltiplicando la superficie pel terzo dell' altezza della piramide.*

VI.

Dal che si deduce, che *questa seconda pressione è la metà della prima; e che essa sta alla pressione fatta contro la base nella prima posizione del vaso, come sta un terzo della superficie alla base.*

VII.

Un vaso cilindrico pieno d' acqua situato con base orizzontale porta nella superficie curva tanta pressione, quanto è il peso d' un volume d' acqua risultante dal moltiplicare quella superficie per la metà dell' altezza del cilindro. Di fatti il centro

di gravità della ſuperficie curva del cilindro è nel mezzo della ſua altezza.

VIII.

Da ciò s' inferiſce, che *nel cilindro retto equilatero la preſſione contro la ſuperficie curva è doppia della preſſione contro la baſe*; *ed aggiunta la preſſione contro la baſe, la preſſione totale contro tutta la ſuperficie vale tre volte il peſo dell' acqua premente*; come appunto nel vaſo cubico; *e finalmente la preſſione totale è ſeſquialtera della preſſione contro la ſuperficie curva*.

IX.

L' acqua, che riempie un vaſo conico poſato ſulla ſua baſe orizzontale, preme la ſuperficie curva con uno sforzo uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto di queſta ſuperficie moltiplicata per due terzi dell' altezza del cono: perchè il centro di gravità della ſuperficie curva del cono trovaſi ai due terzi della ſua altezza, contando dalla punta.

X.

Ma ſe il vaſo conico ſi capovolge, ſicchè la baſe orizzontale ſia ſuperiore, allora la preſſione contro la ſuperficie curva è la metà della precedente.

XI.

Se il vaſo è un cono retto, tenuto nella prima ſituazione, ſta la preſſione contro la ſuperficie curva a quella contro la baſe, come due terzi del lato al ſemidiametro della baſe, e al peſo dell' acqua, che contiene, ſta come il doppio lato allo ſteſſo ſemidiametro.

XII.

Capovolto il cono retto, in queſta ſeconda ſituazione ſta la preſſione contro la ſuperficie curva al peſo dell' acqua, come il lato del cono al ſemidiametro della baſe.

XIII.

Circoscritto il cono retto al cilindro retto, sta la pressione contro la superficie curva del cono nella prima situazione alla pressione contro la superficie curva del cilindro, come due terzi del lato del cono al lato del cilindro; e nella seconda situazione, come un terzo del lato del cono al lato del cilindro.

XIV.

Supposto il cono equilatero, la pressione contro la superficie curva nella prima situazione è d' un terzo più grande che la pressione contro la base, ed uguaglia quattro volte il peso dell' acqua.

XV.

La pressione contro la base nella prima situazione del cono equilatero è sesquialtera della pressione contro la superficie curva nella seconda situazione.

XVI.

L' acqua, che riempie una sfera, ne preme la superficie con uno sforzo, il quale ha per misura il prodotto della superficie moltiplicata pel semidiametro.

XVII.

La pressione contro la superficie sferica fa tre volte il peso dell' acqua premente.

XVIII.

Dal n.° VIII. si raccoglie, che *la pressione contro tutta la premibile superficie del cilindro circoscritto alla sfera è sesquialtera della pressione contro la superficie della sfera.* E per tal modo quella proporzione sesquialtera, che *Archimede* con tan-

ta gloria discoprì fra le superficie e le solidità del cilindro circoscritto e della sfera, viene ora qui estesa da noi anche alle pressioni, che soffrono le superficie di questi due corpi o riempiuti d' acqua o immersi nell' acqua fino alla loro sommità.

Delle Formole Generali delle Pressioni.

Passiamo ora a rintracciare le formole generali della pressione de' fluidi contro un piano qualunque immerso nel fluido in qualsivoglia positura, come pure contro le superficie curve de' corpi, o de' vasi rotondi generati per rotazione. L' applicazione di queste formole a qualche eletto esempio ci guiderà alla cognizione di alcune eleganti proprietà, che chiameremo *idrostatiche*, delle figure geometriche, che ci sono più familiari.

PROBLEMA I.

Determinare la pressione dell' acqua contro un piano qualunque, e comunque situato sotto il fluido premente.

SOLUZIONE.

Sia il piano *ABDF* (*Fig.* 5.) circoscritto dalla retta orizzontale *BD*, dalla *DF* perpendicolare alla *BD*, dall' altra orizzontale *FA*, e da una linea o retta, o curva *AB*. Per ritrovare l' inclinazione del piano all' orizzonte, tirisi da *F* la retta orizzontale *FG* perpendicolare alla *FA* sicchè il piano *AFG* sia orizzontale. Essendo ora alla comune sezione *AF* dei due piani *BAFD*, *AFG*, perpendicolare la *FG* nel secondo piano, e la *FD* nel primo, sarà l' angolo *GFD* l' inclinazione del piano proposto all' orizzonte. Suppongasi, che il livello dell' acqua giunga al punto *N* della retta prodotta *DF*, e guidisi *NO* parallela alla *FG*: e perchè *AF* è perpendicolare così alla *FD* come alla *FG*, sarà anche il piano *AFG* perpendicolare al piano *DFG*, ovvero *DNO*, e però il

piano DNO sarà verticale. Se ora dal punto O preso ad arbitrio nella retta NO casca al basso la verticale OH, si troverà questa nel predetto piano, e taglierà in H la retta DF, in G la FG. Guidate le ordinate infinitamente prossime HM, hm perpendicolari alla FD, e posta l' ascissa $FH = x$, l' ordinata $HM = y$, $BD = a$, $DF = b$, $FN = c$, l' angolo d' inclinazione $GFD = ONH = \phi$, sarà $OH = (c + x)$ sen. ϕ, e l' elemento Hm del piano, moltiplicato per la sua distanza HO dalla superficie superiore dell' acqua, rappresenterà la pressione elementare contro lo stesso piano, ossia la pressione contro l' elemento Hm, la quale in conseguenza si troverà $= (c + x)ydx$ sen. $\phi = (cydx + yxdx)$ sen. ϕ. Cercato quindi l' integrale di questa espressione per modo che esso si annulli insieme colla x, si otterrà la pressione contro il piano indeterminato $AFHM$; e sostituito b in vece di x nel detto integrale, si ha l' intera pressione contro il dato piano $FABD$. Il che era ecc.

Esempio I. Il piano $AFBD$ sia un rettangolo, e però $y = a$. La formola $\int (cydx + yxdx)$ sen. ϕ diventa $\int (acdx + axdx)$ sen. $\phi = (acx + \frac{1}{2}ax^2)$ sen. ϕ, dove fatto $x = b$, l' intera pressione contro il rettangolo diventa $(acb + \frac{1}{2}ab^2)$ sen. ϕ.

Se l' acqua non oltrepassa il lato superiore del rettangolo, cioè se $c = 0$, la detta pressione si trasforma in $\frac{1}{2}ab^2$ sen. ϕ, vale a dire nell' area del rettangolo moltiplicata per la metà dell' altezza dell' acqua sopra il lato inferiore del rettangolo.

Esempio II. Sia il piano proposto un triangolo rettangolo AFD (*Fig.* 6) colla punta rivolta in giù, e col lato superiore orizzontale FA. Sarà dunque $a = 0$, e posta $FA = f$, nascerà $y = \frac{f(b - x)}{b}$. Laonde $\int (c + x)ydx$ sen. ϕ

$$= \int \frac{f(b - x)}{b}(c + x) \text{ sen. } \phi = \left(fcx + \frac{1}{2}fx^2 - \frac{fcx^2}{2b}\right.$$

$-\frac{fx^3}{3b}$) ſen. ϕ rappreſenterà la preſſione contro l' area indefinita *AFHM* ; e fatta $x = b$, trovaſi la preſſione contro tutto il triangolo $= \left(\frac{1}{2}fcb + \frac{1}{6}fb^2\right)$ ſen. ϕ.

Se il triangolo ha la punta rivolta in ſu, e il lato orizzontale all' ingiù, come nella Fig. 7, allora ſi ha $y = \frac{ax}{b}$, e

$$\int (c+x)ydx \text{ ſen. } \phi = \int (c+x)\frac{ax}{b}dx \text{ ſen. } \phi$$

$= \left(\frac{cax^2}{2b} + \frac{ax^3}{3b}\right)$ ſen. $\phi =$ alla preſſione contro l'area *FMH*, e quindi poſta $x = b$, riſulta la preſſione contro tutto il triangolo $= \left(\frac{1}{2}cab + \frac{1}{3}ab^2\right)$ ſen. ϕ.

Nella prima ſituazione del triangolo, ſupponendo $c = 0$, ovvero che il lato del triangolo arrivi al piano di livello, la preſſione ricercata diventa $\frac{1}{6}fb^2$ ſen. ϕ, cioè il prodotto del triangolo moltiplicato per un terzo dell' altezza dell' acqua ſopra la punta inferiore del triangolo.

Nella ſeconda ſituazione, fatto lo ſteſſo ſuppoſto di $c = 0$, la preſſione ſi muta in $\frac{1}{3}ab^2$ ſen. ϕ, cioè nell' area del triangolo moltiplicata per due terzi dell' altezza dell' acqua ſopra il lato orizzontale inferiore.

Eſempio III. Cerchiſi la preſſione contro il ſemicircolo *FMD* (*Fig.* 8), il di cui diametro $FD = b$, $a = 0$, $y = \sqrt{(bx - x^2)}$, $xdx = \frac{1}{2}bdx - ydy$. Perciò ſi ha $\int (cydx + yxdx)$ ſen. $\phi = \int \left(c + \frac{1}{2}b\right)$ ſen. $\phi ydx - \int y^2dy$ ſen. ϕ

$= \left(c + \frac{1}{2}b\right).FHM.$ ſen. $\phi - \frac{1}{3}y^3$ ſen. ϕ, e la preſſione totale

contro

contro il ſemicircolo riſulta $= \left(c + \frac{1}{2}b\right) . FMD . \text{ſen.}\,\phi =$ $\left(c + \frac{1}{2}b\right)\frac{b^2\pi}{8}\,\text{ſen.}\,\phi$, poſta $1:\pi$ la ragione del diametro alla circonferenza; e il doppio di queſto valore ſomminiſtra la preſſione contro tutto il cerchio *FMDR*.

Eſempio IV. Sia il piano dato un quadrante *GCD*, il di cui ſemidiametro ſuperiore *GC* ſia orizzontale, ed $= b$, $CH' = x$, $H'M' = y$, $a = 0$. Per la natura del cerchio ſi ha $y^2 = b^2 - x^2$, ed $ydy = -xdx$. Dunque $\int (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi$ $= \int cydx\,\text{ſen.}\,\phi - \int y^2dy\,\text{ſen.}\,\phi = c\,\text{ſen.}\,\phi . GCH'M' - \frac{1}{3}y^3\text{ſen.}\,\phi$ $+ \text{coſt.} = c . GCH'M' . \text{ſen.}\,\phi + \left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}y^3\right)\text{ſen.}\,\phi =$ alla preſſione contro l' area indefinita *GCH'M'*; e però la preſſione contro tutto il quadrante *GCD* ſarà $= c . GCD . \text{ſen.}\,\phi +$ $\frac{1}{3}b^3\,\text{ſen.}\,\phi = \left(\frac{c\pi}{4} + \frac{1}{3}b\right)b^2\,\text{ſen.}\,\phi$, e queſta raddoppiata dà la preſſione contro il ſemicircolo *GRD*.

Eſempio V. Sia il quadrante *GFC*, che ha il ſemidiametro inferiore orizzontale *GC*; ſe ne dimanda la preſſione. Si ha $CG = CF = b$, $FH = x$, $HM = y$, $y^2 = 2bx - x^2$, $xdx = bdx - ydy$. Adunque $\int (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi =$ $\int (c + b)ydx\,\text{ſen.}\,\phi - \int y^2dy\,\text{ſen.}\,\phi = (c + b) . FMH . \text{ſen.}\,\phi$ $- \frac{1}{3}y^3\,\text{ſen.}\,\phi =$ alla preſſione contro lo ſpazio indeterminato *FMH*. Laonde la preſſione totale contro il quadrante diventa $\left(\frac{(c+b)\pi}{4} - \frac{1}{3}b\right)b^2 . \text{ſen.}\,\phi$, e il doppio eſprime la preſſione contro il ſemicircolo *GFR* col diametro inferiore orizzontale.

Eſempio VI. Sia lo ſpazio parabolico *FBD* (*Fig.* 9) compreſo dall' ordinata inferiore orizzontale $BD = a$, e dall' aſciſ-

sa $DF = b$. Suppoſto p il parametro della parabola ſi ha $y = \sqrt{px}$. Dunque $\int (cydx + yxdx)$ ſen. $\phi = \int cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ ſen. ϕ

$+ \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ ſen. $\phi = (\frac{2}{3} cx \sqrt{px} + \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px})$ ſen. $\phi =$

$\frac{2}{3} cxy$ ſen. $\phi + \frac{2}{5} x^2 y$ ſen. $\phi =$ alla preſſione contro lo ſpazio FMH indefinito; e però la preſſione contro tutto lo ſpazio FBD trovaſi $(\frac{2}{3} cba + \frac{2}{5} b^2 a)$ ſen. ϕ, e il doppio rappreſenta la preſſione contro lo ſpazio parabolico BOF colla doppia ordinata inferiore orizzontale BO.

Eſempio VII. Vogliaſi la preſſione contro lo ſpazio parabolico ADF (*Fig.* 10) circoſcritto ſuperiormente dall' ordinata orizzontale $FA = a$, e dall' aſciſſa $FD = b$. Eſſendo $FH = x$, ed $HD = b - x$, l' equazione della parabola trovaſi eſſere $y^2 = p(b - x)$. Adunque $\int (cydx + yxdx)$ ſen. $\phi =$

$\int cdx \sqrt{(pb - px)}$ ſen. $\phi + \int xdx$ ſen. $\phi \sqrt{(pb - px)}$. Pongaſi ora $\sqrt{(pb - px)} = u$, ed è $\int cdx$ ſen. $\phi \sqrt{(pb - px)} +$

$$\int xdx \text{ ſen. } \phi \sqrt{(pb - px)} = \int - \frac{2cu^2 du \text{ ſen. } \phi}{p}$$

$$+ \int - \frac{2bu^2 du \text{ ſen. } \phi}{p} + \int \frac{2u^4 du \text{ ſen. } \phi}{p^2} = - \frac{2cu^3 \text{ ſen. } \phi}{3p}$$

$$- \frac{2bu^3 \text{ ſen. } \phi}{3p} + \frac{2u^5 \text{ ſen. } \phi}{5p^2} + \text{coſt.} = \frac{2(pb - px)^2 \text{ ſen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$$- \frac{2(c + b)(pb - px) \text{ ſen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{3p} + \text{coſt.}$$

$$= \frac{2}{3} b(c + b) \text{ ſen. } \phi \sqrt{pb} - \frac{2}{5} b^2 \text{ ſen. } \phi \sqrt{pb}$$

$$+ \frac{2(pb - px)^2 \text{ ſen. } \phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$-\frac{2(c+b)(pb-px)\,\text{fen.}\,\phi\sqrt{(pb-px)}}{3p}$, perchè fvanifce la preffione annullandofi la x. Queſto valore eſprime la preffione contro lo ſpazio indefinito $FAMH$, e foſtituendo in eſſo b per x riſulta la preffione totale contro lo ſpazio parabolico $FAD = \frac{(10bc+4b^2)\,\text{fen.}\,\phi\sqrt{pb}}{15}$, e dal doppio di queſto valore ſi ha la preffione contro lo ſpazio $FADQ$.

Eſempio VIII. Cerchiſi la preffione contro la ſemielliffe FBD (*Fig.* 11.) ſituata coll' aſſe minore BQ orizzontale. Chiamato a l' aſſe maggiore FD, b l' aſſe minore BQ, la proprietà dell' elliſſe ſomminiſtra l' equazione $a^2y^2 = b^2(ax-x^2)$, e quindi $xdx = \frac{1}{2}adx - \frac{a^2ydy}{b^2}$. Laonde ſarà la preffione contro lo ſpazio indefinito $FMH = \int(cydx + yxdx)\,\text{fen.}\,\phi =$ $\int(c+\frac{1}{2}a)ydx\,\text{fen.}\,\phi - \int\frac{a^2y^2dy\,\text{fen.}\,\phi}{b^2} = (c+\frac{1}{2}a).FMH.\,\text{fen.}\,\phi$ $-\frac{a^2y^3\,\text{fen.}\,\phi}{3b^2}$, e quindi la preffione totale contro la ſemielliſſe $=(c+\frac{1}{2}a).\ FDB.\,\text{fen.}\,\phi = \frac{1}{8}(c+\frac{1}{2}a)\pi ab\,\text{fen.}\,\phi$, il di cui doppio eſprime la preffione contro tutta l' elliſſe in queſta ſituazione, cioè coll' aſſe minore orizzontale.

Eſempio IX. Sia da trovarſi la preffione contro il quadrante ellittico BDO, ſituato col diametro minore orizzontale, e rivolto all' insù. Chiamiſi $\frac{1}{2}b$ il ſemiaſſe minore BO, $\frac{1}{2}a$ il maggiore OD, x la OH', y la $H'M'$, e ſi avrà $a^2y^2 = b^2(\frac{1}{4}a^2-x^2)$, $\frac{a^2ydy}{b^2} = -xdx$. Perciò $\int(cydx+yxdx)\,\text{fen.}\,\phi$ $= c.OBM'H'\,\text{fen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{fen.}\,\phi}{3b^2} + \text{coſt.} = c.OBM'H'.\,\text{fen.}\,\phi$ $+\frac{1}{24}a^2b\,\text{fen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{fen.}\,\phi}{3b^2} =$ alla preffione contro l' area in-

definita $OBM'H'$. Perlochè la pressione contro tutto il quadrante BDO sarà $= c \,.\, BDO .$ sen. $\phi + \frac{1}{24} a^2 b$ sen. $\phi = \frac{1}{16} \pi cab$ sen. ϕ $+ \frac{1}{24} a^2 b$ sen. ϕ, e il doppio di questo valore darà la pressione contro la semiellisse BDQ avente l' asse minore orizzontale rivolto all' insù.

Esempio X. Se fosse da cercarsi la pressione contro il quadrante ellittico FBO, situato col semiasse minore orizzontale BO rivolto all' ingiù, basterebbe nell' equazione (*Esemp.* VIII.) $\left(c + \frac{1}{2} a\right) . FMH$ sen. $\phi - \frac{a^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2}$ sostituire $\frac{1}{2} b$ in luogo di y, d' onde nascerebbe $\frac{1}{16}\left(c + \frac{1}{2} a\right) \pi ab$ sen. $\phi - \frac{1}{24} a^2 b$ sen. $\phi =$ alla pressione contro il quadrante ellittico FBO, e il doppio di questo valore esprimerebbe la pressione contro la semiellisse FBQ coll' asse minore orizzontale rivolto in giù.

Esempio XI. Dimandasi la pressione contro la semiellisse FBD (*Fig.* 12) situata col semiasse maggiore BO orizzontale, e coll' asse minore FD inclinato all' orizzonte. Ritenute le denominazioni di prima, trovasi per la natura dell' ellisse $\frac{b^2 y^2}{a^2} = bx - x^2$, e però $xdx = - \frac{b^2 ydy}{a^2} + \frac{1}{2} bdx$. Dunque $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = \left(c + \frac{1}{2} b\right) . FMH .$ sen. $\phi - \frac{b^2 y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2}$ $=$ alla pressione contro lo spazio indefinito FMH, e in conseguenza la pressione totale contro la semiellisse risulta $= \frac{1}{8}\left(c + \frac{1}{2} b\right) \pi ab$ sen. ϕ, il qual valore duplicato dà la pressione contro tutta l' ellisse $BFQD$ situata coll' asse maggiore orizzontale e col minore inclinato all' orizzonte.

Esempio XII. Se vuolsi la pressione contro il quadrante ellittico BDO col semiasse maggiore orizzontale rivolto all' insù; posta $OH = x$, $H'M' = y$, si ha l' equazione $\frac{b^2 y^2}{a^2} =$ $\frac{1}{4} b^2 - x^2$, e quindi $xdx = - \frac{b^2 ydy}{a^2}$, e conseguentemente

$\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = c$. $OBM'H'$. sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2} +$ cost. $= c$. $OBM'H'$. sen. $\phi + \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2} =$ alla pressione contro lo spazio indefinito $OBM'H'$; e però la pressione totale contro il quadrante BDO sarà $= \frac{1}{16} \pi cab$ sen. ϕ $+ \frac{1}{24} b^2 a$ sen. ϕ, il qual valore duplicato rappresenta la pressione contro la semiellisse BDQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' insù.

Esempio XIII. Se trattasi di trovare la pressione contro il quadrante ellittico FBO situato col semiasse maggiore orizzontale BO rivolto al basso, allora basta nell'equazione (*Esemp.* XI.) $\left(c + \frac{1}{2} b\right)$. FMH. sen. $\phi - \frac{b^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3a^2}$, la quale rappresenta la pressione contro lo spazio indefinito FMH, sostituire il quadrante FBO in vece di FMH, ed $\frac{1}{2} a$ in luogo di y, ed hassi $\left(c + \frac{1}{2} b\right)$. FBO. sen. $\phi - \frac{1}{24} b^2 a$ sen. $\phi =$ $\frac{1}{16}\left(c + \frac{1}{2} b\right) \pi ab$ sen. $\phi - \frac{1}{24} ab^2$ sen. $\phi =$ alla pressione contro il quadrante ellittico FBO; e il doppio di questo valore rappresenta la pressione contro la semiellisse FBQ situata coll' asse maggiore orizzontale rivolto all' ingiù.

Esempio XIV. Sia da trovarsi la pressione contro lo spazio Iperbolico FBD (*Fig.* 13) circoscritto dall'ordinata orizzontale inferiormente $BD = b$, e dall' ascissa $FD = k$ inclinata all' orizzonte. Nominando a l'asse principale dell' Iperbola, b il conjugato, si sa, l' equazione di questa curva essere $\frac{a^2y^2}{b^2} = ax + x^2$, e quindi $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} - \frac{1}{2} adx$. Perciò $\int (cydx + yxdx)$ sen. $\phi = \left(c - \frac{1}{2} a\right)$. FMH. sen. $\phi + \frac{a^2y^3 \text{ sen. } \phi}{3b^2} =$ alla pressione contro lo spazio indefinito FMH. Laonde la

pressione totale contro lo spazio proposto *FBD* sarà $=$ $\left(c-\frac{1}{2}a\right).FBD.\text{sen.}\,\phi+\frac{a^2h^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}$, e il doppio rappresenterà la pressione contro il doppio spazio *FBC*.

Esempio XV. Sia finalmente da determinarsi la pressione contro lo spazio iperbolico inverso *FBD* (*Fig.* 14) compreso superiormente dall' ordinata orizzontale $FB=h$, e dall' ascissa $FD=k$. Posta pertanto $FH=x$, $HM=y$, la proprietà dell' iperbola somministra l' equazione $\frac{a^2y^2}{b^2}=a(k-x)+(k-x)^2=ak+k^2-ax-2kx+x^2$, dalla quale si ottiene $xdx=\frac{a^2ydy}{b^2}+\left(\frac{1}{2}a+k\right)dx$. Adunque

$$\int(cydx+yxdx)\,\text{sen.}\,\phi=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBMH.\text{sen.}\,\phi$$
$$+\frac{a^2y^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}+\text{cost.}=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBMH.\text{sen.}\,\phi$$
$$-\frac{a^2h^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}+\frac{a^2y^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}=$$

alla pressione contro lo spazio indefinito *FBMH*. Perlochè la pressione totale contro il dato spazio *FBD* trovasi $=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBD.\text{sen.}\,\phi$ $-\frac{a^2h^3\,\text{sen.}\,\phi}{3b^2}$, il doppio di cui esprime la pressione contro il doppio spazio *BCD* situato colla doppia ordinata orizzontale rivolta all' insù.

PROBLEMA II.

Nel vaso DAHGFEBC (Fig. 15), *che ha per base orizzontale il rettangolo* ADCB, *e per uno de' suoi lati ha il rettangolo* DAHG *comunque inclinato all' orizzonte, arriva l' acqua fino ad* HF; *e in un altro vaso* DAHGQPRS *situato sulla predetta base prolungata ed avente lo stesso lato* DAHG *giugne l' acqua fino al punto* O: *cercasi qual sarà la pressione, che soffre quel lato secondo una sola e medesima direzione.*

SOLUZIONE.

Tirisi per O la verticale MON; e sarà (*Esemp. I.*) la pressione esercitata dall' acqua del primo vaso X contro il lato rettangolare $DAHG = DA . AH . \frac{1}{2} MN$, e la pressione esercitata dall' acqua del secondo vaso Z contro il lato rettangolare $OTDA$ sarà $= DA . AO . \frac{1}{2} MO$, ed esercitandosi questa seconda pressione in una direzione opposta alla prima si avrà in conseguenza la pressione contro tutto il lato $DAHG$ verso una sola e medesima direzione $= DA . AH . \frac{1}{2} MN - DA . AO . \frac{1}{2} MO$, ovvero (essendo $NM : MO :: HA : AO$) $= \frac{1}{2} MN . DA . AH$ $- \frac{1}{2} \frac{DA . HA . MO^2}{MN} = \frac{DA . AH}{2MN} (MN^2 - MO^2)$. Il che era ecc.

La suddetta pressione seguita adunque la ragione della differenza dei quadrati di MN e di MO, cioè delle altezze dell' acqua ne' due vasi.

PROBLEMA III.

Sopra il piano inclinato NMPO (Fig. 16.) *giace il vaso prismatico retto pieno d' acqua* GADHFECB, *del quale le due faccie opposte* GADH, BFEC *sono due trapezj paralleli, simili ed uguali, i di cui lati* BF, CE, AG, DH, *in questa giacitura del prisma vengono a riuscire verticali, e co' loro estremi* G, H, F, E, *giungono allo stesso piano orizzontale; cercasi la pressione contro le due faccie rettangole verticali* BAGF, DHEC, *e quindi lo sforzo, col quale il prisma tenderà a discendere pel piano inclinato.*

SOLUZIONE.

La preſſione contro il rettangolo *GABF* ſi è trovata (*Eſemp. I.*) $= \frac{1}{2} AB . BF^2$, e quella contro il rettangolo *DCEH* $= \frac{1}{2} DC . CE^2 = \frac{1}{2} AB . CE^2$; e queſte preſſioni eſercitandoſi in direzioni oppoſte, riſulta la preſſione, colla quale il priſma viene orizzontalmente ſpinto alla diſceſa $= \frac{1}{2} AB (BF^2 - CE^2)$. Il che era ecc.

Pongaſi $AB = a$, $BF = b$, l' angolo d' inclinazione $MPQ = \omega$, e tirata l' orizzontale $CR = FE = f$, ſarà l' angolo $BCR = \omega$, $BR = f . \text{tang. } \omega = BF - FR = BF - CE$, cioè $CE = b - f . \text{tang. } \omega$. Sarà dunque il trapezio $BFEC = \frac{1}{2} FE (BF + CE) = \frac{1}{2} f (2b - f . \text{tang. } \omega)$, e quindi il volume del priſma $= \frac{1}{2} af (2b - f . \text{tang. } \omega)$. Dicaſi Q il peſo di queſto priſma pieno d' acqua; e poichè abbiamo la preſſione orizzontale, tendente a far diſcendere il priſma $= \frac{1}{2} a \left(b^2 - (b - f . \text{tang. } \omega)^2 \right) = \frac{1}{2} a f . \text{tang. } \omega \left(2b - f . \text{tang. } \omega \right)$, ſarà perciò una tal preſſione $= Q . \text{tang. } \omega$.

Chiamato q il peſo del vaſo priſmatico vuoto, è noto dalla Statica, che un peſo $Q + q$ ſituato ſovra il detto piano inclinato viene tenuto in equilibrio ſul piano ſteſſo da una forza orizzontale $= (Q + q) \text{ tang. } \omega$. Ma per tenere in equilibrio il detto priſma pieno d' acqua, non baſta una forza orizzontale, la quale ſoſtenga ſul piano inclinato il peſo $Q + q$ di quel priſma, richiedendoſi inoltre un' altra forza per equilibrare la preſſione orizzontale $Q . \text{tang. } \omega$. Conſeguentemente il priſma viene ſoſtenuto ſul piano inclinato da una forza orizzontale $= (2 Q + q) \text{ tang. } \omega$.

SCOLIO.

SCOLIO.

Avvertasi qui, che non si è voluto tener conto di quella pressione orizzontale, che risulta dalla pressione contro la base *ADCB*, la qual pressione orizzontale riscontrasi eguale e contraria alla già ritrovata, siccome appunto dee succedere, essendo noto, che le pressioni orizzontali si annullano sempre in tutti i vasi, o corpi esposti alla pressione dell' acqua. Rappresenti in fatti il trapezio *BFEC* la sezione verticale fatta con un piano verticale e perpendicolare alle due faccie *GB*, *HC*; e la pressione contro la base *BC* del trapezio espressa dalla normale *TX* si risolva nella verticale *TY*, e nella orizzontale *XY*, e starà $TX : XY :: BC : BR$, e però $XY = \frac{TX . BR}{BC}$.

Siccome poi la pressione $TX = BC . \frac{1}{2}(BF + CE)$, sarà $XY = \frac{1}{2}(BF + CE) . BR = \frac{1}{2}(BF + CE) . (BF - CE) = \frac{1}{2} BF^2 - \frac{1}{2} CE^2$, e questa moltiplicata per *AB* dà la pressione orizzontale risultante dalla pressione contro la base *ADCB*, che si trova appunto uguale, e contraria alla precedente. E' un errore di non pochi acclamati Scrittori quello di credere, che l' acqua a motivo delle pressioni, con cui spinge ed incalza secondo tutte le direzioni le pareti de' vasi, che la contengono, possa produrre ne' vasi d' una data forma situati sulle loro basi orizzontali un rovesciamento, o capitombolo, laddove all' opposto la stessa acqua ghiacciata lascia il vaso ritto ed immobile sulla sua base; per modo che sia una differenza essenziale in ordine alla sua stabilità, che il vaso si trovi pieno di acqua fluida, oppure d' acqua ghiacciata. Per togliere un tal pregiudizio, e mostrare, che i due stati opposti dell' acqua, cioè di fluidità, e di solidità non possono cagionare la menoma alterazione o divario nello stato del vaso in riguardo al reggersi sulla sua base, o al rovesciarsi, basterà far vedere che la *risultante* di tutte le pressioni eserci-

tate dall' acqua fluida contro tutte le pareti del vaſo perfettamente coincide colla *linea di direzione* , ſecondo la quale agiſce tutto il peſo dell' acqua o del ghiaccio. Sia a cagion d' eſempio il triangolo verticale BAC (*Fig.* 25) colla baſe orizzontale BC, e ſuppongaſi la ſua aja formata d' uno ſtrato di acqua premente contro i lati del triangolo . Tiriſi dalla punta A del triangolo ſulla baſe orizzontale prolungata BC la perpendicolare AM . E' noto , che la baſe BC ſoffre una preſſione $= BC \cdot AM$, che queſta preſſione paſſa pel punto di mezzo N della baſe, e può rappreſentarſi colla retta verticale QN. Parimente il lato AB riſente una preſſione $= \frac{1}{2} AB \cdot MA$, la quale paſſa pel *centro di preſſione* S, che è ai due terzi di AB contando da A, come ſi deduce dalla Teoria del centro di preſſione che eſporremo più ſotto , e può rappreſentarſi colla retta IS normale ad AB. Riſoluta poſcia la preſſione IS nella orizzontale IO, e nella verticale OS tendente all' insù, trovaſi $OS = \frac{BM \cdot IS}{BA} = \frac{1}{2} BM \cdot MA$. Così pure ſe la preſſione contro il lato AC, la quale è $= \frac{1}{2} AC \cdot AM$, ſi concepiſce applicata al centro di preſſione in F ai due terzi di AC contando da A , e ſi eſprime colla retta FR perpendicolare ad AC, e ſi riſolve nell' orizzontale RP, e nella verticale FP tendente all' ingiù , ſe ne deduce toſto $FP = \frac{CM \cdot FR}{AC} = \frac{1}{2} CM \cdot MA$. Abbiamo dunque tre forze verticali, che agiſcono contro i lati del triangolo, cioè

$$1.° + QN = BC \cdot MA,$$

$$2.° - OS = - \frac{1}{2} BM \cdot MA,$$

$$3.° + FP = \frac{1}{2} CM \cdot MA.$$

La diſtanza della prima dal punto M è $= MC + \frac{1}{2} CB$; la

diſtanza della ſeconda è $= \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB$; quella della terza è $= \frac{2}{3} CM$. Dunque per la dottrina Statica de' Momenti la diſtanza della *riſultante* di queſte tre forze dallo ſteſſo punto M ſarà

$$= \frac{QN(MC + \frac{1}{2} CB) + FP \cdot \frac{2}{3} CM - OS(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{QN + FP - OS}$$

$$= \frac{BC \cdot MA(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{2} CM \cdot MA \cdot \frac{2}{3} CM - \frac{1}{2} BM \cdot MA(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{BC \cdot MA + \frac{1}{2} CM \cdot MA - \frac{1}{2} BM \cdot MA}$$

$$= \frac{BC(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{3} CM^2 - \frac{1}{2}(BC + CM)(\frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB)}{\frac{1}{2} BC}$$

$= \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} BC$. Ora queſta diſtanza è appunto quella della linea di *direzione* EG dal detto punto M; poichè venendo eſſa condotta verticalmente dal centro di gravità E del triangolo poſto ai due terzi della AN che biparte la baſe, viene ad eſſere, a motivo di $AE = \frac{2}{3} AN$, $GM = \frac{2}{3} NM = \frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB$. Dunque la *riſultante* di tutte le preſſioni contro il perimetro del triangolo coincide colla *linea di direzione*.

PROBLEMA IV.

Determinare la preſſione dell' acqua contro le pareti curve de' vaſi rotondi, oſſia di rotazione.

SOLUZIONE.

Rotiſi la linea AMP (*Fig.* 17.) intorno all' aſſe verticale BD, e deſcriva un vaſo rotondo, il quale riempiaſi d' acqua. Si cerca la preſſione ſopra la ſuperficie curva del vaſo. Condotte le ordinate ortogonali infinitamente vicine MN, mn, e fatta $PD = a$, $AB = b$, $BD = c$, $BF = x$, MF

$= y$, $AM = s$, ed $1 : \pi =$ al rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, sarà $2\pi y =$ alla circonferenza del cerchio, che ha MF per raggio; e però l'elemento della superficie curva del vaso sarà $= 2\pi y . Mm = 2\pi y ds$, e la pressione contro questo elemento sarà $= 2\pi yxds = 2\pi yx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quindi integrata questa pressione elementare per modo che l'integrale si annulli colla x, si ottiene la pressione contro la superficie indefinita $AMNC$; e posto poi c per x nell' integrale si ha la pressione contro tutta la superficie curva. Il che era ecc.

Esempio I. Vuolsi conoscere la pressione contro la superficie curva del cono retto troncato. In tal supposto egli è visibile, che la linea AMP è $= \sqrt{(c^2 + (b-a)^2)}$, cui diremo h. E' altresì manifesto, che si ha $s : h :: x : c$, e perciò $s = \frac{hx}{c}$, e $ds = \frac{hdx}{c}$. Inoltre egli è visibile, che sta

$b - y : x :: b - a : c$; laonde $y = b - \frac{(b-a)x}{c}$. Dunque

$$\int 2\pi yxds = \int \left(2bx - \frac{2(b-a)x^2}{c} \right) \frac{\pi hdx}{c} =$$

$\frac{\pi h}{c}\left(bx^2 - \frac{2(b-a)x^3}{3c} \right) =$ alla pressione contro la superficie curva indefinita $AMNC$. Posto c in luogo di x si ricava $2\pi hc \left(\frac{1}{6} b + \frac{1}{3} a \right) =$ alla pressione contro la superficie curva intera del cono troncato.

Il valore di questa pressione assegnato da alcuni celebri Idrostatici è palesemente erroneo, e l'errore è nato per aver essi supposto, che due lati del cono troncato infinitamente vicini rinchiudessero fra di sè sulla superficie del cono un rettangolo, laddove essi comprendono un trapezio di basi parallele.

Esempio II. Si cerca la pressione contro la superficie curva $BMILN$ (*Fig.* 18) del segmento sferico generato dalla rotazione dell' arco circolare BMI intorno al diametro verticale BD. Essendo $BF = x$, $MF = y$, e il raggio del circo-

lo $=r$, si ha $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$, e $dy=\frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$; e quindi $dx^2+dy^2=ds^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, ovvero $ds=\frac{rdx}{y}$; e quest' ultimo valore surrogato nella formola $\int 2\pi yxds$, ella si trasforma in $\int 2\pi rxdx=\pi rx^2=$ alla pressione contro la superficie indefinita *BMN*. Siccome poi è $\pi rx^2=2\pi rx.\frac{1}{2}x$, cioè $=$ alla superficie del segmento moltiplicata per la metà della saetta, o dell' altezza dell' acqua sopra *MN*, perciò un tal prodotto rappresenta la pressione suddetta.

Esempio III. Se la superficie del segmento sferico fosse *PDS* colla base orizzontale rivolta all' insù; allora posta $RU=x$, $UM'=y$, $RD=h$, e però $DU=h-x$, l'equazione del circolo dà $y=\sqrt{(2r(h-x)-(h-x)^2)}$, e quindi $dy=\frac{-rdx+(h-x)dx}{\sqrt{(2r(h-x)-(h-x)^2)}}$, $dy^2+dx^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=ds=\frac{rdx}{y}$. Dunque $\int 2\pi yxds=\int 2\pi rxdx$ $=\pi rx^2$, vale a dire la pressione contro la superficie indefinita *PM'N'S* equivale al prodotto della superficie istessa moltiplicata per la metà della sua saetta, o ascissa *RU*, ovvero per la metà dell' altezza dell' acqua sopra *M'N'*.

Laonde la superficie curva d' un segmento sferico pieno d' acqua, o sia esso a foggia di cupola, o sia rinchiuso fra due cerchj paralleli soffre una pressione, che ha per misura la stessa superficie moltiplicata per la metà della saetta. Osservisi qui, che sempre nel mezzo della saetta trovasi il centro di gravità della superficie curva del segmento.

La formola $\int 2\pi yxds$ dà la pressione contro la superficie curva del vaso soltanto nell' ipotesi, che l' acqua non oltrepassi l'orlo superiore del vaso, ed abbia x per altezza sopra

l' elemento della fuperficie: che fe l' acqua giugneffe più fu della fuperficie del vafo per modo che l' altezza di quella fopra l' orlo di quefto foffe $= h$, è chiaro, che in tal cafo la formola della preffione diverrebbe $\int 2\pi y(h+x)\,ds$, la quale fi tratta con ugual facilità che la prima.

PROBLEMA V.

Nell' argine, o riparo rettangolare OPMN *d' un fiume* (Fig. 16.) *giugne l' acqua da* OP *fino ad* IK; *cercafi lo sforzo, con cui l' argine farà fpinto dall' acqua orizzontalmente, e quello, con cui farà fpinto dalla medefima all' ingiù verticalmente.*

SOLUZIONE.

Chiamato ω l' angolo d' inclinazione MPQ dell' argine, $PK = a$, $KI = PO = b$, e la verticale $KU = h$, rifulta la preffione contro l' argine (*Probl. I. Efemp. I*) $= \frac{1}{2}abh = \frac{bh^2}{2\,\text{fen.}\,\omega}$. Ma quefta preffione fi efercita in una direzione KS perpendicolare al piano dell' argine; perciò fe ne faccia la rifoluzione nelle due preffioni laterali KL, KZ, quella orizzontale, quefta verticale. Ora è noto dalla Statica, che fta $KS : KL : LS :: 1 : \text{fen}\,\omega : \text{cof.}\,\omega ::$ Prefs. perpend. : Prefs. orizz. : Prefs. vertic. Dunque Prefs. orizz. $= \frac{bh^2}{2\,\text{fen.}\,\omega}\,\text{fen.}\,\omega = \frac{1}{2}bh^2$; Prefs. vertic. $= \frac{bh^2}{2\,\text{fen.}\,\omega}\,\text{cof.}\,\omega = \frac{1}{2}bh^2\,\text{cot.}\,\omega$. Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Una cataratta, offia una tavola rettangolare verticale chiude in un canale, o cifterna all' acqua l' ufcita: cercafi quanta forza fia d' uopo per alzarla, e dar l' efito all' acqua.

SOLUZIONE.

Detta b la base della cataratta, a l' altezza, c la distanza del suo lato superiore dal pian di livello, che si suppone più alto, si sa per le cose già dimostrate, che la pressione contro la cataratta è $= ab\left(\frac{1}{2}a + c\right)$. Con siffatta pressione è dunque direttamente spinta la cataratta contro gl' incastri. Laonde supposto l' attrito una parte n.^{esima} della pressione, risulterà l' attrito della cataratta cogl' incastri $= \frac{1}{2n}\, ab\left(a + 2c\right)$, ed aggiunto a questo il peso p della cataratta, ci vorrà una forza $= \frac{ab\left(a + 2c\right) + 2np}{2n}$ per far equilibrio colla resistenza della cataratta, e un pò maggiore per sollevarla. Il che era ecc.

Reca meraviglia il vedere presso alcuni celebri moderni Scrittori di Meccanica, che per calcolare la forza necessaria a sollevare la cataratta non solamente si mette in conto la resistenza dello sfregamento contro gl' incastri, ed il peso della cataratta, ma ben anche la pressione totale esercitata dall' acqua contro il piano della cataratta, e si stabilisce in conseguenza, dover essere la detta forza un pò maggiore della somma di queste tre. Ma essendo la pressione dell' acqua contro la cataratta perpendicolare alla medesima, ed anche alla direzione della forza, che tende a sollevarla, è cosa innegabile, che l' una non può nè punto nè poco impedire l' effetto dell' altra e non può quindi la pressione entrare nel calcolo se non per quella parte che costituisce lo sfregamento.

Se il lato superiore della cataratta giugne al pian di livello, ovvero è $c = o$, egli è evidente, che a misura che la cataratta si va inalzando una minor parte di essa resta esposta alla pressione dell' acqua. Suppongasi inalzata di tanto, che la distanza del suo lato inferiore dal pian di livello sia $= x$, e però la pressione in tal caso diventi $= \frac{1}{2}bx^2$, e l' attrito $= \frac{bx^2}{2n}$. La forza motrice, colla quale la cataratta tende a di-

ſcendere, qualora venga abbandonata, trovaſi $= p - \frac{bx^2}{2n}$, e l'acceleratrice $= 1 - \frac{bx^2}{2np}$. Perciò chiamato t il tempo, in cui la cataratta diſcende per l' altezza x, v la ſua velocità nel termine del tempo t, ſi avrà $\left(1 - \frac{bx^2}{2np}\right)dt = dv$, cioè, eſſendo $dt = \frac{dx}{v}$, ſi otterrà $\left(1 - \frac{bx^2}{2np}\right)dx = vdv$, ed integrando $x - \frac{bx^3}{6np} = \frac{1}{2}v^2$, $v = \sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}$, e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3np}\right)}}.$$

Ma ſe $p < \frac{bx^2}{2n}$, allora la cataratta non diſcende, e fa d' uopo d' una forza capace di vincer l'attrito per farla diſcendere. Sia queſta forza il peſo q, ed avremo $q + p - \frac{bx^2}{2n} =$ alla forza motrice della diſceſa, e però $1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)} =$ alla acceleratrice. Laonde $\left(1 - \frac{bx^2}{2n(p+q)}\right)dx = vdv$, $x - \frac{bx^3}{6n(p+q)} = \frac{1}{2}v^2$,

$$v = \sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2x - \frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)}}.$$

Qualora vogliaſi ſollevare la cataratta, dicaſi f la forza impiegata per ſollevarla, e ſia $a - x$ la di lei ſalita nel tempo t colla velocità v. La forza motrice della ſalita ſarà dunque $f - p - \frac{bx^2}{2n}$, e però $\frac{2nf - 2np - bx^2}{2n(f+p)}$ ſarà la forza acceleratrice. Conſeguentemente ſi ottiene

$$\frac{(2nf - 2np - bx^2)\,dx}{2nf + 2np} = vdv, \text{ e quindi}$$

(2nf—

$\frac{(2nf-2np)x-\frac{1}{3}bx^3}{2nf+2np}=\frac{1}{2}v^2+\text{cost.}$, ed essendo $v=0$. quando $x=a$, si ha $v^2=\frac{(2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3)}{n(f+p)}$, cioè

$v=\sqrt{\frac{(2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3)}{n(f+p)}}$; e finalmente

$$t=\int\frac{dx\sqrt{(n(f+p))}}{\sqrt{((2nf-2np)(x-a)+\frac{1}{3}b(a^3-x^3))}}.$$

Del Centro di Pressione.

Una cosa degna di considerazione nella Dottrina della pressione dei Fluidi è quella, che riguarda il *Centro di Pressione*. Dicesi pertanto Centro di pressione quel punto della superficie premuta, nel quale si concepisce concentrata e raccolta l'intera pressione, che è distribuita e dispersa per tutti i punti della superficie; ovvero quel punto, al quale applicata una forza uguale e contraria all'intera pressione bilancia e distrugge tutto l'effetto di questa, per modo che se la pressione tende ad imprimere alla superficie un moto qualunque, la forza uguale e contraria applicata al centro della pressione impedisce e distrugge un tal moto.

PROBLEMA VII.

Ritrovare il Centro di pressione di qualunque superficie piana BAFG (Fig. 19) *divisa in due parti uguali e simili dalla linea delle ascisse* MI, *ed immersa dentro un fluido omogeneo a qualunque profondità, e sotto qualunque inclinazione al pian di livello, purchè le ordinate* AM, CE, ecc. *siano parallele al detto piano.*

SOLUZIONE.

La comune sezione del pian di livello, e del piano proposto *GFAB* prodotto sia la retta *OQ*, e condotte le due dop-

pie ordinate infinitamente prossime CD, cd, lo spazietto $CDdc$ sarà l'elemento dell' area indefinita $ACDB$. Ora questo elemento soffre dal fluido, che vi gravita sopra, una pressione equivalente al peso d'un volume di fluido che nasce dal moltiplicare l' elemento per la sua distanza dal pian di livello, la qual distanza è per ipotesi la stessa per tutti i punti di detto elemento. Si conduca EO normale ad OQ, e dal punto O si guidi nel pian di livello la OR normale all' istessa OQ, e finalmente alla OR s'inalzi dal punto E la perpendicolare ER: egli è manifesto, che ER sarà la mentovata distanza, ed EOR l' angolo d' inclinazione del dato piano all' orizzonte; e conseguentemente l'elemento $CDdc$ moltiplicato per ER rappresenta la pressione elementare contro il piano indefinito $CABD$. Considerata pertanto questa pressione elementare a guisa d'un peso, il quale si riferisce alla retta OQ come all' *asse de' momenti*, risulta per le dottrine della Statica il momento della pressione elementare con moltiplicare questa per la distanza EO dall' asse de' momenti. Presa dunque sulla linea delle ascisse la $ME = x$, l'ordinata $EC = y$, $MN = a$, l'angolo delle coordinate ovvero $ENO = \phi$, l' inclinazione del piano all' orizzonte, ossia l'angolo $EOR = \omega$, si ottiene $EO = (a + x)\,\text{sen.}\,\phi$, $ER = (a + x)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{sen.}\,\omega$, $CDdc = 2ydx.\,\text{sen.}\,\phi$. Laonde il momento della pressione elementare trovasi $= 2ydx\,(a + x)^2\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^3\,\phi$; e quindi la somma de' momenti delle pressioni nell' area indefinita $ABDC$ sarà $=$

$\int 2ydx\,(a + x)^2\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^3\,\phi$. Una tal somma per le dottrine della Statica debb' essere uguale al momento, che ha tutta la pressione esercitata contro l'area medesima $ABCD$, qualora essa pressione si concepisca concentrata e raccolta nel centro di pressione, e riferita all' istesso asse OQ. Perciò essendo tutta la pressione contra l' area indefinita $=$

$\int 2ydx\,(a + x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^2\,\phi$, se si chiama Δ la distanza del centro di pressione dall' asse de' momenti si avrà l' ugualtà

$$\int 2ydx\,(a + x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^3\,\phi = \Delta \int 2ydx\,(a + x)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}^2\,\phi,$$

e conseguentemente $\Delta = \frac{\int y dx (a + x)^2 \text{ sen. } \phi}{\int y dx (a + x)}$. Ritrovata per tal modo la distanza del centro di pressione dall'asse de' momenti, ed essendo altronde evidente, che non può il detto centro uscire dalla linea delle ascisse *MI*, la quale divide per ipotesi il dato piano in due parti simili, ed uguali, resterà in conseguenza determinata la posizione del centro di pressione. Il che era ecc.

Supposte le ordinate ortogonali, cioè $\phi = 90°$, ed oltracciò $a = 0$, il valore di Δ si trasforma in quest'altro più semplice $\frac{\int y x^2 dx}{\int y x dx}$.

Esempio I. Cercasi il centro di pressione nel parallelogrammo *ABGF* (*Fig.* 20.) nell'ipotesi, che il suo lato superiore *AB* sia nel pian di livello. Dicasi $ME = x$, $CE = AM = y = b$, $MI = c$. Si avrà per l'area indefinita *ACDB* il valore di $\Delta = \frac{\int b x^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int b x dx} = \frac{\frac{1}{3} b x^3 \text{ sen. } \phi}{\frac{1}{2} b x^2} = \frac{2}{3} x \text{ sen. } \phi$, e per tutto il parallelogrammo *FABG* si avrà $\Delta = \frac{2}{3} c \text{ sen. } \phi$, cioè il centro *P* di pressione si trova a due terzi di *MI* contando da *M*, posciachè *MP* è $= \frac{2}{3} MI$.

Nel parallelogrammo *QABR*, la di cui base passa per *P* centro di pressione del dato, trovasi del pari il centro di pressione in *O* a due terzi di *MP*, cioè a quattro noni di *MI*, essendo $MO = \frac{2}{3} MP = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} MI = \frac{4}{9} MI$. La distanza *OP* de' due centri di pressione *O*, *P* è $= \frac{2}{9} MI$.

Volendosi poi il centro di pressione nel parallelogrammo *FQRG*, il di cui lato superiore *QR* passa pel centro di pressione del dato *FABG*, convien ricorrere alla formola $\frac{\int y (a + x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y (a + x) dx}$, e porre $a = MP = \frac{2}{3} c$, donde si raccoglie $\Delta = \frac{\int b (\frac{2}{3} c + x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int b (\frac{2}{3} c + x) dx} = \frac{(\frac{4}{9} c^2 x + \frac{2}{3} c x^2 + \frac{1}{3} x^3) \text{ sen. } \phi}{\frac{2}{3} c x + \frac{1}{2} x^2}$

$= \frac{\frac{2}{3}(4c^2 + 6cx + 3x^2)\,\text{sen.}\,\phi}{4c + 3x}$. E perciò posto $x = PI = \frac{1}{3}c$, risulta $\Delta = \frac{\frac{2}{3}\,\text{sen.}\,\phi\,(4c^2 + 2c^2 + \frac{1}{3}c^2)}{4c + c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{19c\,\text{sen.}\,\phi}{15} = \frac{38}{45}c\,\text{sen.}\,\phi$; e in conseguenza il centro U di pressione del parallelogrammo QG è situato ai $\frac{38}{45}$ della retta MI, contando da M. Di qui si deduce, che PU è $= \frac{8}{15}PI$.

Stando sempre a quest' esempio, egli è manifesto, che essendo nel parallelogrammo AG il centro di pressione in P, e però uguali i momenti intorno a P, rimarrà fisso ed immobile il parallelogrammo qualora sia puntellato in P.

Se si costruirà una cataratta parallelogramma AG avente i lati AB, FG orizzontali, e questa mobile intorno a due assi piantati in Q ed in R, estremità della orizzontale QR, la quale passa per P ai due terzi MI, la cataratta rimarrà chiusa tutte le volte, che l'acqua ascenderà fino al lato superiore AB; il che è manifesto dalle cose precedenti: per lo contrario ella si aprirà rotandosi intorno agli assi Q ed R tanto se l'acqua non arriverà fino in AB, quanto se oltrepasserà AB. Imperciocchè se l'acqua resta al di sotto di AB, per esempio in CD, il centro di pressione del parallelogrammo CG trovasi ai due terzi di EI, come P è ai due terzi di MI; e però il predetto centro di pressione casca al di sotto di P: onde avviene, che la cataratta per la spinta dell'acqua è costretta a rotarsi intorno ai due assi, la parte inferiore QG volgendosi dal di dentro al di fuori, e la superiore QB dal di fuori al di dentro per riguardo al luogo occupato dall'acqua. Che se l'acqua oltrepassa AB, e giugne fino in K, allora ricorrendo alla formola $\frac{\int y(a+x)^2\,dx\,\text{sen.}\,\phi}{\int y(a+x)\,dx}$, e posto $KM = a$, $y = b$, si ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2\,dx\,\text{sen.}\,\phi}{\int (a+x)\,dx} = \frac{(a^2 + ax + \frac{1}{3}x^2)\,\text{sen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}x}$, e fatto $x = c$, si ha $\Delta = \frac{(a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2)\,\text{sen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}c}$. Laonde se

O è il centro di pressione della cataratta AG in questa ipotesi, sarà $KO = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$, valore manifestamente minore di $a + \frac{2}{3}c$, vale a dire di KP. Dunque il centro di pressione della cataratta in questo caso casca al di sopra di P, e conseguentemente l' urto dell' acqua obbliga la cataratta ad aprirsi, e a volgersi intorno agli assi, movendosi in fuori la parte superiore QB, e in dentro l' inferiore QG.

Esempio II. Si vuol sapere il centro di pressione nel piano triangolare FMG (*Fig.* 21) situato colla base orizzontale all' ingiù. Essendo in questo caso $CE = y = \frac{bx}{c}$, si sostituisce questo valore nella formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y(a+x)dx}$, e si ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2 x dx \text{ sen. } \phi}{\int (a+x) x dx} = \frac{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}x^2) \text{ sen. } \phi}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x}$ $= \frac{(6a^2 + 8ax + 3x^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4x}$, e fatto $x = c = MI$, si ha per tutto il piano triangolare FMG, $\Delta = \frac{(6a^2 + 8ac + 3c^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 4c}$.

Se il pian di livello passa pel vertice M del triangolo sicchè sia $MK = a = 0$, risulta $\Delta = \frac{3}{4} c \text{ sen. } \phi$, il che indica, che in questo supposto il centro di pressione trovasi a tre quarti di MI contando d' alto in basso.

Situato il triangolo colla base orizzontale rivolta all' insù (*Fig.* 22.), e fatta $KM = a$, $MA = b$, $MI = c$, $ME = x$, $EC = y = \frac{b}{c}(c - x)$, la formola $\frac{\int y(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y(a+x)dx}$ diventa

$$\frac{\int (c-x)(a+x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int (c-x)(a+x) dx} =$$

$$\frac{\int (a^2c + 2acx - a^2x + cx^2 - 2ax^2 - x^3) dx \text{ sen. } \phi}{\int (ca + cx - ax - x^2) dx} =$$

$\frac{(a^2c + acx - \frac{1}{2} a^2x + \frac{1}{3} cx^2 - \frac{2}{3} ax^2 - \frac{1}{4} x^3) \text{ sen. } \phi}{ca + \frac{1}{2} cx - \frac{1}{2} ax - \frac{1}{3} x^2} = \Delta$ per l' area indefinita $ACDB$. Quindi fatto $x = c$, si ha per tutto il triangolo AIB, $\Delta = \frac{(6a^2 + 4ac + c^2) \text{ sen. } \phi}{6a + 2c}$; e se vuolsi, che l' acqua non ascenda oltre il lato superiore AB, sicchè sia $a = 0$, nasce allora $\Delta = \frac{1}{2} c \text{ sen. } \phi$, che è quanto dire, che il centro di pressione trovasi in tal caso nel mezzo della retta MI.

Esempio III. Cercasi il centro di pressione nella parabola Apolloniana CMD (*Fig.* 23) situata dentro il fluido colle ordinate all' asse orizzontali, e col vertice rivolto in alto. Chiamato p il parametro, y la CE, x la ME, si ha $y = \sqrt{px}$, $\phi = 90°$, $MK = a$. Laonde la formola $\frac{\int y (a + x)^2 dx \text{ sen. } \phi}{\int y (a + x) dx}$ diventa $\frac{\int (a^2\sqrt{px} + 2ax\sqrt{px} + x^2\sqrt{px})dx}{\int (a\sqrt{px} + x\sqrt{px})dx}$

$$= \frac{\frac{2}{3} a^2x\sqrt{px} + \frac{4}{5} ax^2\sqrt{px} + \frac{2}{7} x^3\sqrt{px}}{\frac{2}{3} ax\sqrt{px} + \frac{2}{5} x^2\sqrt{px}} = \frac{\frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{5} ax + \frac{1}{7} x^2}{\frac{1}{3} a + \frac{1}{5} x}$$

$= \frac{35a^2 + 42ax + 15x^2}{35a + 21x} = \Delta$. Nel caso che l' acqua non oltrepassi il vertice della parabola, ovvero che sia $a = 0$ nasce $\Delta = \frac{30}{42} x = \frac{5}{7} x$; vale a dire il centro di pressione trovasi a cinque settimi dell' ascissa ME contando dal vertice.

Ma se il piano parabolico si capovolge, e rimanendo colle ordinate orizzontali si riduce col vertice in giù (*Fig.* 24), allora posta $MI = c$, $ME = x$, $CE = y$, l' equazione della parabola somministra $y = \sqrt{(pc - px)}$; ond' è, che surrogato questo valore nella formola nota, si deduce $\Delta = \frac{\int dx (a + x)^2 \sqrt{(pc - px)}}{\int dx (a + x) \sqrt{(pc - px)}}$. Per poter eseguire le integrazioni richieste, facciasi $\sqrt{pc - px} = z$, e si avrà $x = c - \frac{z^2}{p}$,

$dx = -\frac{2zdz}{p}$, $a+x = a+c-\frac{z^2}{p}$. Perciò si ricava $\Delta =$

$$\frac{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)^2}{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)} = \frac{\frac{2}{5p}(a+c)z^5 - \frac{1}{3}(a+c)^2 z^3 - \frac{1}{7p^2}z^7 + \text{cost.}}{\frac{1}{5p}z^5 - \frac{1}{3}(a+c)z^3 + \text{cost.}}.$$

Laonde sostituendo in quest' espressione il valore di z, si ottiene $\Delta =$

$$\frac{+c)(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^3\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)\sqrt{(pc-px)} + \text{cost.}}.$$

Per determinare le costanti, avvertasi, che quando è $x=0$ svanisce così l' integrale del numeratore, cioè la somma de' momenti, come l' integrale del denominatore, cioè la somma delle pressioni. Conseguentemente la cost. del numeratore sarà $= \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2 pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}$, e la cost. del denominatore sarà parimente $= \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}$. Dunque $\Delta =$

$$\frac{+c)(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}},$$

che dà il centro di pressione per lo spazio indefinito $ACDB$. Se pertanto in questa espressione si assume $x=c$ per avere il centro di pressione di tutto lo spazio definito AIB, si trova dopo le debite trasformazioni $\Delta = \frac{8c^2+35a^2+28ac}{35a+14c}$.

Da ciò s' inferisce, che qualora l' acqua non salga oltre l' ordinata AM, e però si abbia $a=0$, il centro di pressio-

ne è ſituato a quattro ſettimi dell' aſciſſa definita *MI* contando dall' alto. Conſeguentemente ſtando in queſto ſuppoſto di $a = o$, il centro di preſſione nella parabola diritta è d'un quarto più diſtante dal pian di livello, che nella parabola rivoltata.

INDAGINI

NEL CALCOLO INTEGRALE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

ESsendomi propoſto di applicare il metodo mio adoperato nella XIV. Prop. della Mem. ſul Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite, inſerita nel I. Vol. della *Società Italiana*, all' integrazione dell' equazione differenziale

$$M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3} \text{ ecc.} \ldots\ldots + T\frac{d^ny}{dx^n};$$

e le prime operazioni avendone chiamato ſucceſſivamente dell' altre, il lavoro di ſaggio in ſaggio preſe forma, e queſta n'è poi venuto, qualunque ella ſiaſi, non lunga indagine, che vo' credere non totalmente indegna dell' attenzione de' Geometri. Ogni paſſo, ogni nuova apertura d'integrabilità è ſommamente pregevole in queſta ſorta di equazioni, che vengono sì ſovente in campo nelle Scienze Meccaniche, e nell' Aſtronomia fiſica, e che non ſenza ragione hanno meritato lo ſtudio de' Signori d' *Alembert*, *Eulero*, de la *Grange*, de *Condorcet*, *Bezout*, de la *Place*, e di altri illuſtri Matematici.

Trattando queſte materie con nuovi artifizj, ſiccome ho fatto, traluce ſempre raggio d' incognita verità, che mena a qualche avanzamento indubitatamente; del che potrà accertarſi chi vorrà al progreſſo di queſta Memoria attendere con qualche accuratezza.

PROPOSIZIONE I.

§. I. *Trasformare l' equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3} \text{ ecc.} \ldots\ldots T\frac{d^ny}{dx^n}$$

in cui dx *è costante*, M P Q R ecc. *sono funzioni qualunque della variabile* x, *per modo che la sua risoluzione dipenda da due equazioni del grado* n — 1.

RISOLUZIONE.

Si ponga $y = \mu^{\int z dx} \int \left(u dx . \mu^{-\int z dx} \right)$, essendo z ed u due nuove variabili, μ il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Passando ai differenziali dell' ordine n, si avrà

$$d^n y = z d^{n-1} y dx + \frac{n-1}{1} dz\, d^{n-2} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} d^2 z d^{n-3} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} d^3 z d^{n-4} y dx \ldots\ldots + d^{n-1} u dx.$$

Dunque sostituendo successivamente 1, 2, 3 ecc. per n sarà

I. $dy = zydx + udx$

II. $ddy = zdydx + dzydx + dudz$

III. $d^3y = zddy + 2dzdydx + ddzydx + ddudx$

ecc.

Si sostituisca nel II. differenziale il valore di dy tratto dal I. e si avrà

(II.) $ddy = z^2ydx^2 + zudz^2 + ydzdx + dudx$

e similmente nel III. differenziale si ponga il valore di dy ricavato dal I., e il valore di ddy ricavato dal (II.) e così successivamente; ne risulterà per ordine

(I.) $dy = zydx + udx$

(II.) $d^2y = z^2ydx^2 + zudx^2 + ydxdz + dudx$

(III.) $d^3y = z^3ydx^3 + z^2udx^3 + zdudx^2 + 3zydzdx^2 + 2udzdx^2$
$+ yd^2zdx + d^2udx$

(IV.) $d^4y = z^4ydx^4 + z^3udx^4 + z^2dudx^3 + 6z^2ydzdx^3$
$+ zddudx^2 + 5uzdzdx^3 + 3ydz^2dx^2 + 3dudzdx^2$

$+ 4zyddzdx^2 + 3uddzdx^2 + yd^3zdx + d^3udx$
ecc.

Si sostituiscano tutti questi valori nell'equazione (A); prenderà ella la seguente forma

$$M = y + P(zy + u) + Q\left(z^2y + zu + \frac{ydz}{dx} + \frac{du}{dx}\right)$$
$$+ R\left(z^3y + z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{3zydz}{dx} + \frac{2udz}{dx} + \frac{yddz}{dx^2} + \frac{ddu}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(z^4y + z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{6z^2ydz}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx} + \frac{3ydz^2}{dx^2}\right.$$
$$\left. + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{4zyddz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2} + \frac{yd^3z}{dx^3} + \frac{d^3u}{dx^3}\right)$$
$$+ \text{ecc.}$$

Di questa equazione se ne faccian due, una delle quali contenga in ogni termine la variabile lineare y, e l' altra abbracci il complesso di tutti gli altri termini, che non la comprendono; e si avranno le equazioni (B) (C)

$$(B) \ldots 0 = 1 + Pz + Q\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + R\left(z^3 + \frac{3zdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(z^4 + \frac{6z^2dz}{dx} + \frac{3dz^2}{dx^2} + \frac{4zddz}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots M = Pu + Q\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + R\left(z^2u + \frac{zdu}{dx} + \frac{2udz}{dx} + \frac{ddu}{dx^2}\right)$$
$$+ S\left(z^3u + \frac{z^2du}{dx} + \frac{zddu}{dx^2} + \frac{5uzdz}{dx^2} + \frac{3dudz}{dx^2} + \frac{3uddz}{dx^2}\right.$$
$$\left. + \frac{d^3u}{dx^3}\right) + \text{ecc.}$$

ognuna delle quali sarà del grado $n - 1$ relativamente all' equazione principale (A). Ma dalla risoluzione delle equazioni (B), (C) dipende manifestamente la risoluzione dell' equazione (A). Dunque si è trasformata ecc. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. II. Che se nell'equazione (A) si supponga la funzione $M=0$, e si faccia $dy=zydx$, l'equazione (C) non ha più luogo, e ne risulta la sola equazione (B). Dunque reciprocamente l'equazione (B) può sempre trasformarsi nell'equazione (A), in supposizione di $M=0$, con la sostituzione $z=\frac{dy}{ydx}$.

COROLLARIO II.

§. III. E quanto all'equazione (C), ella si riduce agevolmente alla forma dell'equazione (A). Imperciocchè facendo tutti li coefficienti di $u=\Delta$, li coefficienti di $\frac{du}{dx}=\Delta'$, di $\frac{ddu}{dx^2}=\Delta''$ ecc. e di poi $\frac{\Delta'}{\Delta}=P'$, $\frac{\Delta''}{\Delta}=Q'$ ecc. $\frac{M}{\Delta}=M'$, e ordinando finalmente l'equazione per u, si avrà l'equazione

$$(C)\ldots\ldots M'=u+P'\frac{du}{dx}+Q'\frac{ddu}{dx^2}\text{ ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots+T'\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

ch'è della forma (A).

COROLLARIO III.

§. IV. In conseguenza se nell'equazione precedente (C) si ponga $du=z'udx+u'dx$, z', u' essendo due nuove variabili, la si farà dipendere (§. I) dalle due equazioni (B') (C') del grado $n-2$

$$(B')\ldots\ldots 0=1+P'z'+Q'(z'^2+\frac{dz'}{dx})+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots\ldots M'=P'u'+Q'(z'u'+\frac{du'}{dx})+\text{ecc.}$$

E con una simile introduzione di due nuove variabili z'' u'' si farà dipendere l'equazione (C') da due (B'') (C'') del grado $n-3$, e così successivamente, di modo che si perverrà in fine ad un' equazione finita, siccome è manifesto.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *L'integrale completo dell'equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + ecc. \ldots\ldots\ldots T\frac{d^n y}{dx^n}$$

dipende da un integrale particolare di ciascheduna delle equazioni successive e della stessa forma (B), *(B')*, (B'') *ecc.*

DIMOSTRAZIONE.

Avendo in potere un integrale particolare o incompleto dell'equazione *(B)* (§. *I.*) $z = X$ funzione di x, se ne faccia la sostituzione nelle equazioni

$$dy = zydx + udx$$

$$(C) \ldots\ldots M = Pu + Q(zu + \frac{du}{dx} + \text{ecc.}$$

è manifesto, che avendo nello stesso tempo un integrale completo $u = X'$ dell' equazione (*C*) del grado $n - 1$, il quale conterrà necessariamente $n - 1$ costanti arbitrarie, si avrà

$$dy = Xydx + X'dx \text{; e}$$

$y = e^{\int Xdx}(A + \int X'dx\, e^{-\int Xdx})$ sarà l' integrale completo dell' equazione (*A*). Ma se in vece dell' integrale completo dell'equazione (*C*) si avesse un integrale incompleto dell'equazione (*B'*) (§. IV.) $z' = X''$, sostituendo questo valore nelle equazioni

$$du = z'udx + u'dx$$

$$(C') \ldots\ldots M' = P'u' + Q'(z'^2 u' + \frac{du'}{dx}) + \text{ecc.}$$

basterebbe che si avesse l'integrale completo $u' = X'''$ dell'equazione (*C'*) del grado $n - 2$, mentre l'equazione $du = X''udx + X'''dx$ somministrerebbe l' integrale $u = X''''$ comprendente $n - 1$ costanti arbitrarie. Sostituendo pertanto questo valore nell'equazione $dy = Xydx + udx$, si avrebbe l'integrale completo dell' equazione (*A*) come prima

$$y = e^{\int Xdx}(A + \int X''''dx\, e^{-\int Xdx}).$$

Si dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che avendo un valor particolare dell' equazione (B'') (§. IV.), e l' integrale completo dell' equazione (C'') del grado $n-3$, ſi otterrebbe l' integrale completo dell' equazione (A); e così ſucceſſivamente. Ma diſcendendo alle equazioni ſucceſſive (C'''), (C'''') ecc. del grado $n-4$, $n-5$ ecc. ſi perviene ad un valore finito. Dunque l' integrale completo dell' equazione (A) dipende da un integrale particolare di ciaſcheduna delle ſucceſſive equazioni (B), (B'), (B'') ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *L' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \mathrm{M} = \mathrm{y} + \mathrm{P}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2} \ldots\ldots + \mathrm{T}\frac{\mathrm{dy}^n}{\mathrm{dx}^n}$$

dipende da un numero n — 1 *di valori particolari di* z, *che ſoddisfacciano alla prima equazione* (B) (§. I.)

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè ſoſtituendo ſucceſſivamente nell' equazione (C) del medeſimo §.

$$(C) \ldots\ldots M = Pu + Q\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

queſti valori particolari di z, ſi ricaveranno tante equazioni in u ed x del grado $n-1$, quante ha unità il numero $n-1$. Ma il numero di queſte equazioni eſſendo uguale al numero delle quantità

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \text{ ecc.}$$

ſi potranno queſte diſcacciare, e potrà quindi pervenirſi ad un' equazione del primo grado di queſta forma

$$\mathfrak{Q} = S + R\frac{dS}{dx}$$

la quale è riſolubile generalmente, e perciò al valore di u. Poſto ciò, ſia X funzione di x quello che ſi verrà a trovare per sì fatto valore di u, la qual eſpreſſione conterrà in tal caſo una coſtante arbitraria, e ſieno β, β' ecc. i valori parti-

colari di z. Facendo successivamente queste sostituzioni in luogo di z nell' equazione $dy = zydx + Xdx$, e integrando, si avranno gl' integrali

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$

$$y = \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right)$$

ecc. e per conseguenza

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \mu^{-\int \beta dx} \right)$$
$$+ \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \mu^{-\int \beta' dx} \right) + \text{ecc.}$$

sarà l' integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se può integrarsi completamente l' equazione differenziale* (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots 0 = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots\ldots + T\frac{d^n y}{dx^n}$$

potrà completamente integrarsi anche l' equazione differenziale (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots\ldots + T\frac{dy^n}{dx^n}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè sostituendo nell' equazione (Δ) $zydx$ in luogo di dy, ella si cangia nell' equazione (B) (*§. II.*),

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Pz + \mathfrak{Q}\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

se si abbia in potere l' integrale completo dell' equazione (Δ), si potrà conchiuderne l' integrale completo dell' equazione (B), e però si avrà $n-1$ valori particolari di z. Ma avendo $n-1$ valori particolari di z nell' equazione (B), si ha l' integrale completo dell' equazione (A) (*§. VI.*). Per conseguenza se può integrarsi completamente l' equazione (Δ), potrà completamente integrarsi l' equazione (A). Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. VIII. Si può di qua raccorre, che l' equazione (*A*) è tutte le volte integrabile, e ne' medesimi casi che può esserlo l' equazione (Δ), ch'è il Teorema del Sig. de la *Grange*.

COROLLARIO II.

§. IX. Ma non è neppur necessario il conoscere l' integrale completo dell' equazione (Δ), se sieno in poter nostro $n-1$ valori particolari di y nella medesima equazione, potendo ciò bastare per l' integrazione completa dell' equazione (*A*), siccome è manifesto.

COROLLARIO III.

§. X. Similmente se si conoscano n, o $n-1$ valori di z, che soddisfacciano all' equazione (*B*), sostituendoli successivamente nell' equazione (*C*) (§. *I.*), onde ottenere n, o $n-1$ equazioni differenziali, si è veduto al §. VI. che l' equazione generale (*A*) è completamente integrabile per questa via. Si può dunque dispensarsi dal rintracciare un integrale particolare per ciascheduna di queste equazioni differenziali, come sembra richiedere il Sig. de la *Place* (*Memorie* dell' *Accademia* R. di *Torino* Vol. IV. §. III.).

PROPOSIZIONE V.

§. XI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + \ldots\ldots T\frac{dy^n}{dx^n}$$

essendo P, Q..... T *quantità costanti*, *ed* M *funzione di* x *qualunque*.

RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE.

Si ponga nell' equazione di sostituzione (R) (§. *I.*)

$$(R)\ldots\ldots y=\mu^{\int z dx}\int u dx\,\mu^{-\int z dx}$$

la costante indeterminata K in luogo di z. Operando come s' è ivi prescritto, l' equazione (A) si risolverà nelle due (B'), (C')

$$(B')\ldots\ldots o=1+PK+QK^2+RK^3+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots\ldots M=Pu+Q\left(Ku+\frac{du}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

Essendo ordinata l'equazione (B') per rispetto a K, ascende ella al grado, il di cui esponente uguaglia quello dell'ordine dell'equazione proposta (A). Dunque risoluta con l'Algebra comune l'equazione (B'), si mettano per K successivamente nell' equazione (C') le radici trovate. Si otterrà un numero di equazioni col mezzo delle quali potranno discacciarsi i differenziali di u, e si conseguirà il valore finito di u. Sia X questo valore. Sostituendo in seguito nell' equazione (R) il valore di u, e per z successivamente tutte le radici, per esempio a, a', a'' ecc. dell' equazione (B'), si avrà, prendendone di mano in mano gl' integrali, l' espressione

$$y=\mu^{ax}\left(A+\int X dx\mu^{-ax}\right)+\mu^{a'x}\left(A'+\int X dx\mu^{-a'x}\right)+\text{ecc.}$$

che sarà l'integrale completo dell' equazione (A), contenendo un numero n di costanti arbitrarie. Il che ecc.

PROPOSIZIONE VI.

§. XII. *Integrare l' equazione* (T)

$$(\mathrm{T})\ldots M=Ay+B(h+Kx)\frac{dy}{dx}+C(h+Kx)^2\frac{ddy}{dx^2}+\text{ecc.}$$

del Sig. de la Grange (Miscell. Taurin. V. III. pag. 190), h, K, A, B, C ecc. *essendo coefficienti costanti*, M *funzione di* x.

RISOLUZIONE.

Posto, come nella I. Proposizione, $dy = zydx + udx$, col metodo ivi adoperato si trasformerà l'equazione (T) nelle due

$$(B') \ldots \ldots o = A + B(h + Kx)z + C(h + Kx)^2\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots \text{M} = B(h + Kx)u + C(h + Kx)^2\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

Si faccia $z = \frac{r}{h + Kx}$, essendo r una costante indeterminata. Sostituendo questo valore nell' equazione (B'), ella si ridurrà a questa forma (B'')

$$(B'') \ldots \ldots o = A + Br + Cr(r - K) + Dr(r^2 - 3Kr + 2K^2) + \text{ecc.}$$

la quale ordinata per r, somministrerà tante radici r', r'', r''' ecc. quante sono le unità nell' ordine dell' equazione (T). Facendo la stessa sostituzione nell'equazione (C'), vi si sostituiscano successivamente per r le radici r', r'' ecc. trovate; con che si avrà un numero di equazioni eguale a quello delle quantità $\frac{du}{dx}, \frac{ddu}{dx^2}$ ecc., le quali maneggiate, come nelle Propos. precedenti, ci faranno pervenire al valore di $u = X$. Ripigliando pertanto l' equazione di sostituzione

$y = \mu^{\int zdx} \int udx\mu^{-\int zdx}$, e posto X in luogo di u, se π, π', π'', ecc. rappresentino i valori $\frac{r'}{h + Kx}, \frac{r''}{h + Kx}, \frac{r'''}{h + Kx}$ ecc., si mettano π, π' ecc. successivamente per z, e si avrà

$$y = \mu^{\int \pi dx}\left(A + \int Xdx\mu^{-\int \pi dx}\right) + \mu^{\int \pi' dx}\left(A' + \int Xdx\mu^{-\int \pi' dx}\right) + \text{ecc.}$$

per l' integrale completo dell' equazione (T). Il che ecc.

Scolio.

§. XIII. Ancorchè le integrazioni ottenute ne' §. §. XI. XII. si considerino non avere altre difficoltà fuorchè quelle dell' Algebra comune, ridotte come sono a dipendere dalla risoluzione di equazioni algebraiche determinate; ciò non ostante il caso principalmente delle radici eguali, che possono incontrarsi in queste equazioni, obbliga ad operazioni, che sarebbe bene di evitare. Non conosco finora alcun metodo esente dalla necessità di avervi particolare considerazione, allorchè ha luogo questo caso. Eccone uno, che deriva necessariamente da quello che abbiamo adoperato nella risoluzione di queste equazioni differenziali; e fra poco ne daremo un altro ancor più semplice. Si ripigli l' equazione del §. XI. ponendo A, B, C ecc. in luogo di P, Q, R ecc.

$$(A) \ldots\ldots M = y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{ddy}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e sieno (B), (C) le due equazioni nelle quali ella si trasforma

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots\ldots M = Au + B\left(au + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

con la sostituzione $dy = aydx + udx$, essendo a una costante indeterminata. L' equazione (C) si trasforma nell' equazione

$$M' = u + A'\frac{du}{dx} + B'\frac{ddu}{dx^2} + \text{ecc.}$$

della stessa forma di (A), ma del grado $n-1$ (§. III.). Sieno pertanto (B') (C')

$$(B') \ldots\ldots 0 = 1 + A'a' + B'a'^2 + C'a'^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M = A'u' + B\left(au' + \frac{du'}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

le equazioni nelle quali si risolve l'equazione precedente con la sostituzione $du = a'udx + u'dx$, essendo u' una nuova variabile, a' una nuova costante indeterminata. E' manifesto che si trasformerà similmente l'equazione (C') nell'equazione

$M'' = u' + A''\frac{du'}{dx} + B''\frac{ddu'}{dx^2} +$ ecc. della forma parimente di (A), e del grado $n - 2$. Inoltrando l' operazione successivamente, si perverrà all'equazione $M^m = A^m u^m$ da cui si potrà avere il valore finito di u^m. Si tragga una radice o un valore di a^m dall' equazione prossima e determinata (B^m), e avendolo sostituito nell' equazione $du^{m-1} = a^m u^{m-1} dx + u^m dx$ insieme col valore di u^m, si avrà una prima parte integrale completa

$$u^{m-1} = \mu^{a^m x}\left(\text{cost.} + \int u^m dx\, \mu^{-a^m x}\right)$$

Conoscendo il valore di $u^{m-1} = X$, si ricavi una radice o un valore di a^{m-1} dall' equazione determinata (B^{m-1}). Sostituiti questi valori nell' equazione

$$du^{m-2} = a^{m-1} u^{m-2} dx + u^{m-1} dx$$

si conseguirà una seconda parte integrale

$$u^{m-2} = \mu^{a^{m-1}x}\left(\text{cost.} + \int X dx\, \mu^{-a^{m-1}x}\right)$$

Procedendo così successivamente si perverrà al valore di $u = X^m$, che comprenderà $n - 1$ costanti arbitrarie.

Ricavando in seguito una radice o un valore di a dall' equazione (B), se si faccia la sostituzione di questi valori nell' equazione $dy = aydx + udx$, se ne potrà conchiudere finalmente l' equazione finita

$$y = \mu^{ax}\left(\text{cost.} + \int X^m dx\, \mu^{-ax}\right)$$

integrale completo dell' equazione (A), senza che l' andamento sia turbato dalla considerazione delle radici eguali, che possono avervi nell'equazione (B). E questo metodo può applicarsi anche all' integrazione dell' equazione (T) (§. *XII.*).

PROPOSIZIONE VII.

§. XIV. *Integrare l' equazione* (A)

$$(\text{A}) \ldots\ldots \text{M} = y + \text{X}\frac{dy}{dx} + \phi . X\frac{ddy}{dx^2} + \phi' . X\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *sono funzioni di* x *qualunque*, $\varphi.X$, $\varphi'.X$ ecc. *funzioni di* X *indeterminate*.

RISOLUZIONE.

Suppongasi per maggior semplicità $X=P$, $\varphi.X=\mathfrak{Q}$, $\varphi'.X=R$ ecc., e si faccia (K) $dy=aydx+udx$, essendo a una costante a piacere. Col metodo della prima Prop. si risolverà l' equazione (A) nelle due (B), (C)

$$(B)\ldots 0=1+Pa+\mathfrak{Q}a^2+Ra^3+\text{ecc.}$$

$$(C)\ldots M=(P+\mathfrak{Q}a+Ra^2+\text{ecc.})u+(\mathfrak{Q}+Ra+Sa^2+\text{ecc.})\frac{du}{dx}$$
$$+(R+Sa+Ta^2+\text{ecc.})\frac{ddu}{dx^2}+\text{ecc.}$$

Facendo in seguito

$$\Delta=P+\mathfrak{Q}a+Ra^2+\text{ecc.}$$
$$\Delta'=\mathfrak{Q}+Ra+Sa^2+\text{ecc.}$$
$$\Delta''=R+Sa+Ta^2+\text{ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e $\frac{\Delta'}{\Delta}=P'$, $\frac{\Delta''}{\Delta}=\mathfrak{Q}'$ ecc. $\frac{M}{\Delta}=M'$

l' equazione (C) del grado $n-1$ prenderà la forma dell' equazione (A) in questo modo

$$M'=u+P'\frac{du}{dx}+\mathfrak{Q}'\frac{ddu}{dx^2}+\text{ecc.}$$

Di nuovo ponendo in quest' equazione così preparata (K') $du=budx+u'dx$, in cui b è un' altra costante a piacere, u' una nuova variabile, si risolverà ella in altre due (B') (C')

$$(B')\ldots\ldots 0=1+P'b+\mathfrak{Q}'b^2+R'b^3+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots\ldots M'=(P'+\mathfrak{Q}'b+R'b^2+\text{ecc.})u'$$
$$+(\mathfrak{Q}'+R'b+S'b^2+\text{ecc.})\frac{du'}{dx}+\text{ecc.}$$

la seconda delle quali del grado $n-2$ per una preparazione simile alla precedente diverrà

$$M'' = u' + P'' \frac{du'}{dx} + Q'' \frac{ddu'}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la quale con la sostituzione (K'') $du' = cu'dx + u''dx$, e con la stessa preparazione somministrerà le due equazioni del grado $n - 3$

$$(B'') \ldots \, 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

$$(C'') \ldots \, M''' = u'' + P''' \frac{du''}{dx} + Q''' \frac{ddu''}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e così successivamente. Procedendo in tal modo si perverrà all' equazione $M^{n-1} = u^{n-2} + P^{n-1} \dfrac{du^{n-2}}{dx}$ coll' ultima sostituzione (K^n), dall' integrazione della quale si avrà il valore di u^{n-2} con una costante arbitraria. Integrando quindi l'equazione (K^n) si otterrà il valore di u^{n-1}, e si giugnerà finalmente con quest' ordine a trovare il valore di u. In conseguenza si potrà integrare l' equazione primitiva di sostituzione (K), e conseguire il valore di y. Ma perchè questo valore sia l' integrale completo dell'equazione (A) bisogna soddisfare alle equazioni

$$(B) \ldots \, 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(B') \ldots \, 0 = 1 + P'b + Q'b^2 + R'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(B'') \ldots \, 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

. . . .

che hanno luogo insieme con le equazioni (C), (C') ecc. Si consideri pertanto, che tante sono le funzioni indeterminate P, Q, R ecc. quante unità contiene il numero n, e che $n - 1$ è il numero delle equazioni di relazione tra queste funzioni che debbono aver luogo. Dunque è manifesto, che una di queste funzioni può essere tutto quello che si vuole. Sia P questa funzione arbitraria. Maneggiando le altre come incognite, se ne potrà dedurre il valore in P e costanti con le solite regole dell' Algebra comune. E poichè $P = X$, $Q = \phi.X$, $R = \phi'.X$ ecc. si perverrà a determinare le forme ϕ, ϕ', ϕ'' ecc. dell'equazione (A), essendo X una funzione di x qualunque, e a, b, c ecc. costanti a piacere. Egli è visibile, che non la sola P, ma una qualsivoglia delle indeterminate P, Q, R ecc. può pigliarsi da principio per funzione di arbitrio,

e le altre si determineranno col mezzo delle equazioni (B), (B') ecc. Il che ecc.

ESEMPIO I.

Sia da integrare l' equazione differenziale (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + X\frac{dy}{dx} + \frac{1+aX}{a^2}\cdot\frac{ddy}{dx^2}$$

essendo M, X funzioni di x di qualunque forma.

Facendo $X = P$, $\frac{1+aX}{a^2} = -Q$, si avranno con la sostituzione $(K)\ dy = aydx + udx$ le due equazioni

$$(B) \ldots 0 = 1 + Pa + Qa^2$$

$$(C) \ldots M = (P + Qa)u + Q\frac{du}{dx}$$

Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C) $u = V$, si sostituisce il valore di u nell' equazione (K), e si avrà

$$(L) \ldots y = \mu^{ax}(\text{Cost.} + \int Vdx\,\mu^{-ax}$$

integrale completo dell' equazione (A), purchè si soddisfaccia all' equazione (B). Ma sostituendo in (B) X in luogo di P, $-\frac{1+aX}{a^2}$ in luogo di Q, l' equazione svanisce. Dunque l' espressione (L) è l' integrale completo dell' equazione (A)

ESEMPIO II.

Sia da integrare l' equazione differenziale di terzo grado (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + X\frac{dy}{dx} + \left(\frac{a^4 + a^3b - b^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2-b)X}{ab}\right)\frac{ddy}{dx^2} - \left(\frac{a+b+abX}{a^2b^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}$$

M, X essendo funzione di x qualunque, a, b costanti a piacere. Supponendo per maggior semplicità, che l' equazione sia

$$M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + R\frac{d^3y}{dx^3}$$

si avrà con la sostituzione (K) $dy = aydx + u\,dx$ le due equazioni

$(B) \ldots . 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3$

$(C) \ldots . \ M' = u + P' \frac{du}{dx} + Q' \frac{ddu}{dx^2}$

essendo $M' = M : (P + Qa + Ra^2)$, $P' = (Q + Ra) : (P + Qa + Ra^2)$ $Q' = R : (P + Qa + Ra^2)$; e con la sostituzione (K') $du = budx + u'dx$ nell' equazione (C) si avranno le equazioni

$(B') \ldots . 0 = 1 + P'b + Q'b^2$

$(C') \ldots . \ M'' = u' + P'' \frac{du'}{dx}$

essendo $M'' = M : (Q + R(a+b))$, $P'' = R : (Q + R(a+b))$ Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C'), si avrà $u' = V$; e sostituendo questo valore in (K') si avrà integrando $u = V'$. In conseguenza sostituendo questo valore per u nell' equazione (K), e integrando si otterrà

$$y = e^{ax} \left(\text{cost.} + \int V' dx \mu^{-ax} \right)$$

integrale completo dell' equazione (A), giacchè comprende tre costanti arbitrarie, purchè si soddisfaccia alle equazioni (B), (B'). Ma appunto mettendo X in vece di P, $\frac{a^4 + a^3 b - b^2}{a^2 b^2} + \frac{(a^2 - b) X}{a \ b}$ in vece di Q, e $-\frac{a + b + abX}{a^2 b^2}$ in luogo di R entrambe quelle equazioni svaniscono. Dunque ecc.

§. XV.

Ma su le tracce della Prop. precedente possiamo aprirci un campo di speculazione più vasto, e poggiare ad una più grande generalità coll' ajuto delle funzioni indeterminate. Per questa via prenderemo a fare qualche tentativo generale intorno all' integrazione dell' equazione (A) (§. I.) allorchè i coefficienti P, Q, R ecc. sono funzioni di x, nè più nè meno come s' è fatto nella Mem. sopra citata per le equazioni a differenze finite.

Si cominci primieramente dal mettere sotto le forme seguenti le equazioni differenziali di grado in grado, negletto il primo, comprese nell' equazione (A) (§. I.) in supposizione di $M = 0$

$(B) \ldots . 0$

$$(B)\ldots\ldots o = y + F(\phi, \upsilon)\frac{dy}{dx} + F'(\phi, \upsilon)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$(B')\ldots o = y + F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{dy}{dx} + F'(\phi, \upsilon, \Delta)\frac{ddy}{dx^2} + F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$(B'')\ldots\ldots o = y + F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{dy}{dx} + F'(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{ddy}{dx^2} + F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^3y}{dx^3} + F'''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^4y}{dx^4}$$

ecc. essendo ϕ, υ, Δ, λ ecc. funzioni di x, $F(\phi, \upsilon)$, $F'(\phi, \upsilon, \Delta)$ ecc. funzioni di ϕ, υ, di ϕ, υ, Δ ecc. Il numero delle funzioni ϕ, υ, Δ ecc. introdotte in ogni equazione differenziale è uguale al grado dell' equazione da risolvere. Si concepisca poi, che l' equazione (K)

$$(K)\ldots\ldots y = \mu^{\int \phi dx}\left(A + \int dx \mu^{\int \upsilon dx}\left(A' + \int dx \mu^{\int \Delta dx}\left(A'' + \int dx \mu^{\int \lambda dx}\left(A''' + \text{ecc.}\right.\right.\right.\right.$$

all' infinito rappresenti l' integrale completo dell' equazione (A), essendo A, A', A'' ecc. le costanti arbitrarie, di modo che, richiedendosi l' integrale di un' equazione differenziale del grado n, basta fare la costante A^{n+1}, e tutte le susseguenti $= o$. La serie allora s' interrompe, e l' equazione finita risultante comprende n costanti arbitrarie, e tante funzioni ϕ, υ, Δ ecc. quante unità sono in n. In conseguenza pigliando la differenza n^{ma}. di quest' equazione, dovrà ella rappresentare un' equazione (A) del grado n, cioè la forma (B), (B') ecc. corrispondente a quel grado, sì che le forme $F(\phi, \upsilon)$, $F'(\phi, \upsilon, \Delta)$ ecc. verranno ad essere determinate.

Sieno pertanto (P), (P') ecc. questi differenziali successivi dell' equazione (K)

$$(P)\ldots\ldots o = (\phi(\phi + \upsilon) - \phi')y - (\upsilon + 2\phi)\frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$$

$$(P')\ldots\ldots o = ((\phi + \upsilon + \Delta)(\phi' - \phi^2 - \upsilon\phi) - \phi'' + 2\phi\phi' + \phi\upsilon' + \upsilon\phi')y$$

$$+\left((\upsilon+2\phi)(\upsilon+\phi+\Delta)-\upsilon'-3\phi'+\upsilon\phi+\phi^2\right)\frac{dy}{dx}$$

$$-(\Delta+2\upsilon+3\phi)\frac{ddy}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}$$

ecc. ne' quali $\phi'=\frac{d\phi}{dx}$, $\phi''=\frac{d\phi'}{dx}$ ecc. $\upsilon'=\frac{d\upsilon}{dx}$, $\upsilon''=\frac{d\upsilon'}{dx}$ ecc. Questa differenziazione può continuarsi agevolmente, mentre l' equazione (*P*) moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta)dx}$ e differenziata somministra l' equazione (*P'*); l' equazione (*P'*) moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta+\lambda)dx}$ e differenziata somministrerebbe l' equazione prossima susseguente (*P''*); e così all' infinito. Ciò premesso è manifesto, che perchè l' equazione (*K*) assunta sia l' integrale completo dell' equazione (*A*) del grado *n*, quella delle equazioni differenziali (*P*), (*P'*), (*P''*) ecc. ch' è dello stesso grado, dee identificarsi coll' equazione (*A*). In conseguenza tutte le volte, che l' equazione (*A*) potrà ridursi alla forma (*P*), o (*P'*) ecc. l' espressione (*K*) sarà il suo integrale completo. Non sarebbe difficile cosa il dimostrare, che in queste formule si contengono tutte le trasformazioni che possono darsi all' equazione generale (*A*), onde soggettarla ad integrali della forma (*K*). Ora, essendosi dimostrato, che l' equazione (*A*) in supposizione di *M* funzione di *x* è integrabile tutte le volte e ne' medesimi casi che può esserlo in supposizione di $M=0$ (§. *VIII.*), è ben chiaro per sè, che il metodo ci conduce a una grandissima generalità, e abbraccia casi d' integrabilità senza confini per l' equazione (*A*) a coefficienti variabili. Ora mi ristringo a risolvere il caso de' coefficienti costanti per un esempio.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XVI. *Integrare l' equazione* (A)

$$(\mathrm{A})\ldots\ \mathrm{M}=\mathrm{y}+\mathrm{A}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{B}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2}+\text{ ecc.}$$

in cui M *è funzione di* x, A, B, C ecc. *sono quantità costanti*.

RISOLUZIONE.

Pongasi $M = o$; e poichè i coefficienti de' termini sono quantità costanti, dovranno parimente essere quantità costanti le funzioni indeterminate ϕ, υ, Δ ecc.

Dunque la formola rappresentante l'integrale completo dell' equazione (A), in supposizione di $M = o$, sarà

$$(K) \ldots y = \mu^{\phi x} \left(A + \int dx \mu^{\upsilon x} \left(A' + \int dx \mu^{\Delta x} \left(A'' + \text{ecc.} \right.\right.\right.$$

Ora nella differenza n^{ma}. di questa equazione i coefficienti di tutte le potenze differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, ecc. sono funzioni di ϕ, υ, Δ ecc. e n di numero, come risulta da quanto si è esposto nel §. precedente. Ed è pure n il numero de' coefficienti A, B ecc. dell' equazione (A). Dunque identificando le equazioni differenziali, si potrà ricavare da' paragoni un numero n di equazioni in ϕ, υ, Δ ecc. A, B, C ecc. col mezzo delle quali si potranno determinare i valori delle ϕ, υ, Δ ecc. in A, B, C ecc. Se dunque si sostituiranno questi valori nell' equazione (K), si otterrà l' integrale completo dell' equazione differenziale (A) nel caso di $M = o$. Ma dato l' integrale di (A) in supposizione di $M = o$, si ha pure l' integrale di (A) in supposizione di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Dunque ecc.

§. XVII.

Questa risoluzione dell' equazione (A) non è turbata dal caso delle radici eguali (§. *XIII.*) alle quali cogli altri metodi fa d'uopo avere considerazione particolare (Veggasi il II. Vol. del Calc. Integr. del Sig. *Eulero* pag. 429 e segg., e il III. Vol. degli atti di Torino nell' eccell. Mem. del Sig. de la *Grange*).

ESEMPIO.

Sia da integrarsi l' equazione differenzio - differenziale

$$(\mathfrak{Q}) \ldots\ldots M = y - \frac{2dy}{adx} + \frac{ddy}{a^2dx^2}$$

Si facciano nell' espressione (K) (§. XV.) le costanti arbitrarie A'', A''' ecc. $= 0$, e però l' integrale ricercato in supposizione di $M = 0$ sarà della forma seguente

$$(R) \ldots\ldots y = \mu^{\phi x}\left(A + \int A' dx \mu^{\upsilon x}\right)$$

la quale differenziata due volte darà l' equazione (S)

$$(S) \ldots\ldots 0 = y - \frac{\upsilon + 2\phi}{\phi^2 + \upsilon\phi} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\phi^2 + \upsilon\phi} \cdot \frac{ddy}{dx^2}$$

Dal suo paragone pertanto con l' equazione $(\mathfrak{Q})$ si otterrà $\frac{\upsilon + 2\phi}{\phi^2 + \upsilon\phi} = \frac{2}{a}$, $\frac{1}{\phi^2 + \upsilon\phi} = \frac{1}{a^2}$, e però $\phi = -a$, $\upsilon = 0$.

Sostituiti questi valori nell' equazione (R), l' integrale completo dell' equazione $(\mathfrak{Q})$, supposto $M = 0$, sarà

$$y = \mu^{-ax}\left(A + \int A' dx\right) = \mu^{-ax}(A + A'x)$$

I metodi ordinarj avrebbero fatto dipendere quest' integrazione dalla risoluzione dell' equazione

$$0 = 1 - \frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}$$

in cui due radici sono eguali. Ma essendo noto l' integrale in supposizione di $M = 0$, lo sarà pure in supposizione di M funzione di x. Dunque ecc.

§. XVIII.

Non essendomi proposto in questa Memoria, che d' indicare alcune vie, che mi sono aperto per l' integrazione di questa sorta di equazioni differenziali coll' intenzione di ripigliar, se sia possibile, la materia più di proposito, che ora per avventura non m' è conceduto di fare, passiamo a fare qualche ricerca sull' equazione

$$(A)\ldots Mdx^n = x^{\Phi+1}(a+bX)ydx^n + x^{\Phi+2}(c+eX)dydx^{n-1} + x^{\Phi+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in cui M, X sono funzioni qualunque di x, Φ a b c ecc. costanti a piacere. Non è ignoto a' Geometri di quanto uso sia la sola equazione di secondo grado $Mdx^2 = x^2(a+bx^n)ddy + x(e+fx^n)dxdy + (g+hx^n)ydx^2$ ch' è un caso particolarissimo dell' equazione (A), e su cui più di tutti ha diffusamente versato il Sig. *Eulero* nel X. Vol. de' nuovi Com. di St. *Pietroburgo*, e in appresso nel II. Vol. del suo Calc. Integrale. Ci fermeremo pertanto prima su questa, ed estenderemo poi le nostre indagini sull' equazione generale.

PROPOSIZIONE. IX.

§. XIX. Svolgere infiniti casi d' integrabilità dell' equazione

$$(\Delta)\ldots\ \mathrm{M}dx^2 = x^2(a+bx^n)ddy + x(e+fx^n)dxdy + (g+hx^n)ydx^2$$

indipendenti dall' esponente n.

RISOLUZIONE.

I. Si supponga $y = \frac{z}{x}$, essendo z una nuova variabile, e si sostituisca questo valore nell' equazione (Δ). Ella prende questa forma

$$(B)\ldots(a+bx^n)\left(xddz - 2dxdz + \frac{2zdx^2}{x}\right) + (e+fx^n)\left(dzdx - \frac{zdx^2}{x}\right) + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} - Mdx^2 = 0$$

Di questa equazione se ne faccian due nel modo seguente

$$(a+bx^n)\frac{2zdx^2}{x} - (e+fx^n)\frac{zdx^2}{x} + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} = 0$$

$$(a+bx^n)(xddz - 2dxdz) + (e+fx^n)dzdx - Mdx^2 = 0$$

le quali semplificate e ordinate divengono

$$(C)\ 2a - e + g + (2b - f + h)x^n = 0$$

$(D)\ x(a+bx^n)ddz+(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz-Mdx^2=0$

Posto nell' equazione (D) $dz=udx$, si passi all' integrazione..

Si avrà $u=\frac{dz}{dx}=\mu^{-\int\frac{Qdx}{P}}\left(A+\int\frac{Mdx}{P}\mu^{\int\frac{Qdx}{P}}\right)=V$

essendo $Q=e-2a+(f-2b)x^n$, $P=x(a+bx^n)$. Per conseguenza $z=A'+\int Vdx$, e però $y=A'z^{-1}+x^{-1}\int Vdx$ sarà l' integrale completo dell' equazione (Δ), ognora che si soddisfaccia alle due equazioni

$2a-e+g=0$; $2b-f+h=0$, le quali non involgono l' esponente n.

II. Di nuovo si ordini l' equazione (B), e si supponga $M=0$. Si avrà

$$(B')\ldots 0=x^2(a+bx^n)ddz+x\left(e-2a+(f-2b)x^n\right)dxdz$$
$$+\left(2a-e+g+(2b-f+h)x^n\right)zdx^2$$

Posto pertanto $e-2a=e'$, $f-2b=f'$, $2a-e+g=g'$, $2b-f+h=h'$, l' equazione

$$0=x^2(a+bx^n)ddz+x(e'+f'x^n)dxdz+(g'+h'x^n)zdx^2$$

con la sostituzione di $\frac{z'}{x}$ in luogo di z si cangerà in questa

$$x^2(a+bx^n)ddz'+x\left(e'-2a+(f'-2b)x^n\right)dxdz'$$
$$+\left(2a-e'+g'+(2b-f'-h')x^n\right)z'dx^2=0,$$ cioè in questa

$$(B'')\ldots x^2(a+bx^n)ddz'+x\left(e-4a+(f-4b)x^n\right)dxdz'$$
$$+\left(6a-2e+g+(6b-2f+h)x^n\right)z'dx^2=0$$

Similmente si troverà che l' equazione (B'') con la sostituzione di $\frac{z''}{x}$ in luogo di z' si trasformerà in questa

$$(B''')\ldots x^2(a+bx^n)ddz''+x\left(e-6a+(f-6b)x^n\right)dxdz''$$
$$+\left(12a-3e+g+(12b-3f+h)x^n\right)z''dx^2=0$$

Questa poi con la sostituzione di $\frac{z'''}{x}$ in luogo di z'' diverrà

$$(B'''')\ldots x^2(a+bx^n)ddz'''+x\left(e-8a+(f-8b)x^n\right)dxdz'''$$

$+(20a-4e+g+(20b-4f+h)x^n)z'''dx^2=0$
e così successivamente in modo, che dopo m trasformazioni si perverrà all' equazione

$$(B^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^{m-1}+x\big(e-2ma+(f-2mb)x^n\big)dxdz^{m-1}$$
$$+\big((m+m^2)a-me+g$$
$$+((m+m^2)b-mf+h)x^n\big)z^{m-1}dx^2=0$$

Ma di questa equazione fatte due come nell' articolo precedente, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verifichino le due equazioni

$$m^2a+m(a-e)+g=0$$
$$m^2b+m(b-f)+h=0$$

Dunque in tutti questi infiniti casi di relazione tra i coefficienti, ove non entra l' esponente n, essendo m numero intero e positivo, e in supposizione di $M=0$, si avrà l'integrale completo dell' equazione (Δ); e però (§. *VIII.*) anche in supposizione di M funzione della variabile x.

III. Ma di nuovo ancora si ripigli l' equazione (B), e se ne combinino tre paja come segue in ipotesi di $M=0$

$$\begin{cases}(E)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x\big(e-2a+(f-2b)x^n\big)dxdz \\ \qquad +(2a+2bx^n)zdx^2=0 \\ (E')\ldots g-e+(h-f)x^n=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(F)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x\big(e-2a+(f-2b)x^n\big)dxdz \\ \qquad -(e+fx^n)zdx^2=0 \\ (F')\ldots 2a+g+(2b+h)x^n=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(G)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x\big(e-2a+(f-2b)x^n\big)dxdz \\ \qquad +(g+hx^n)zdx^2=0 \\ (G')\ldots 2a-e+(2b-f)x^n=0\end{cases}$$

Se nell' equazione (Δ) si ponga $M=0$, e in luogo di g, f in luogo di h, sì che si soddisfaccia all'equazione (E'), e ne risulti l' equazione

$$(\Delta')\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(e+fx^n)dxdy$$
$$+(e+fx^n)ydx^2=0$$

è certo, che qualvolta s' integrí l'equazione (E) si potrà integrare l' equazione (Δ'). Si faccia pertanto in (E) $e - 2a = e'$, $f - 2b = f'$. Si cangia l' equazione in questa

$$(E'') \ldots x^2(a + bx^n)\,ddz + x(e' + f'x^n)\,dxdz$$
$$+ (2a + 2bx^n)\,zdx^2 = 0$$

la quale è integrabile (*Art.* I.) ognora che si verifichino queste due relazioni $6a - e = 0$; $6b - f = 0$

Dunque in questi casi sarà pure integrabile l' equazione (Δ'). Ma sostituendo $\frac{z'}{x}$ in luogo di z nell' equazione (E''), ella si trasforma per la stessa ragione nell' equazione seguente

$$x^2(a + bx^n)\,ddz' + x(e' - 2a + b(f' - 2b)\,x^n)\,dxdz'$$
$$+ (2a + 2bx^n)\,z'dx^2 = 0$$

cioè nella seguente, facendo $e' - 2a = e''$, $f' - 2b = f''$,

$$(E''') \ldots x^2(a + bx^n)\,ddz' + x(e'' + f''x^n)\,dxdz'$$
$$+ (2a + 2bx^n)\,z'dx^2 = 0$$

e così successivamente. Dunque dopo m trasformazioni si perverrà all' equazione

$$(E^m) \ldots x^2(a + bx^n)\,ddz^{m-1} + x\Big(e - 2ma$$
$$+ (f - 2mb)\,x^n\Big)\,dxdz^{m-1}$$
$$+ (2a + 2bx^n)\,z^{m-1}dx^2 = 0$$

della forma di (Δ'). Ma fatte due equazioni dell' equazione (E^m) col metodo adoperato nel I. *Art.*, si troverà ch' ella è integrabile qualvolta si verifichino queste equazioni

$(2m + 4)\,a - e = 0$; $(2m + 4)\,b - e = 0$

Dunque generalmente in tutti questi casi sarà integrabile completamente l' equazione (Δ'), essendo m numero intero e positivo.

Nello stesso modo mettendo nell' equazione (Δ) $M = 0$, $-2a$ in luogo di g, $-2b$ in luogo di h, onde soddisfare all' equazione (F'), si troverà che l' equazione

$$(\Delta'') \ldots x^2(a + bx^n)\,ddy + (e + fx^n)\,dxdy$$
$$- (2a + 2bx^n)\,ydx^2 = 0$$

con la sostituzione $y = \frac{z}{x}$ si trasforma prima nell' equazione

(H)

$$(H)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x\big(e-2a+(f-2b)x^n\big)dxdz$$
$$-(e+fx^n)zdx^2=0$$

questa con la sostituzione $z=\frac{z'}{x}$ nell' equazione

$$(H')\ldots x^2(a+bx^n)ddz'+x\big(e-4a+(f-4b)x^n\big)dxdz'$$
$$-(e+fx^n)z'dx^2=0$$

e così successivamente, sicchè dopo m trasformazioni si perviene all' equazione

$$(H^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^m+x\big(e-2am+(f-2bm)x^n\big)dxdz^m$$
$$-(e+fx^n)z^mdx^2=0$$

la quale essendo integrabile (*Art. I.*) ognivolta che si verifichino le seguenti equazioni

$$(m+1)a-e=0\,;\ (m+1)b-f=0$$

lo sarà pure negli stessi casi l' equazione (Δ''). E finalmente procedendo nella stessa guisa si dedurrà che l'equazione (Δ''')

$$(\Delta''')\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(2a+2bx^n)dxdy+(g+hx^n)ydx^2=0$$

è integrabile qualora si verifichino le due equazioni

$$2am+g=0\,;\ 2bm+f=0\,.$$

E questo per ora basti intorno all' equazione (Δ). Il che ecc.

PROPOSIZIONE X.

§. XX. *Svolgere infiniti casi d' integrabilità dell' equazione*

$$(Q)\ldots x^{\Phi+3}(a+bX)ddy+x^{\Phi+2}(e+fX)dxdy$$
$$+x^{\Phi+1}(g+hX)ydx^2-Mdx^2=0$$

in cui M, X *sono funzioni di* x *qualunque*, ϕ a b e f ecc. *costanti a piacere*.

RISOLUZIONE.

I. Suppongasi $y=\frac{v}{x^{\Phi+1}}$. Fatta questa sostituzione nell' equazione (Q), ne risulterà l' equazione (R)

$$(R)\ldots(a+bX)\big(x^2ddv-2(\phi+1)xdvdx+(\phi+1)(\phi+2)vdx^2\big)$$

$$+(e+fX)\left(xdvdx-(\phi+1)vdx^2\right)+(g+hX)vdx^2$$

$$-Mdx^2=0$$

dalla quale se ne combinino due

$$(R')\ldots x^2(a+bX)ddv+x\left(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\right)dvdx$$

$$=Mdx^2$$

$$(R'')\ldots a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g$$

$$+\left(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\right)X=0$$

Avendo poi fatto $dv=zdx$ nell' equazione (R''), ella si riduce all' equazione

$$x^2(a+bX)dz+x\left(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\right)zdx=Mdx$$

la quale integrata ci somministra $z=Z$ funzione di x contenente una costante arbitraria. Dunque

$$v=\text{cost.}+\int Zdx;\ \text{e però}\ y=\text{cos.}\,x^{-\phi-1}+x^{-\phi-1}\int Zdx$$

sarà l' integrale completo dell' equazione ($\mathfrak{Q}$) sempre che si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=0$$

II. Si ordini l' equazione (R) (*Art. preced.*) in questo modo, facendo $M=0$, e moltiplicando tutto per $x^{\phi+1}$

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}\left(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\right)dvdx$$

$$+x^{\phi+1}\left(a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g\right.$$

$$\left.+\left(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\right)X\right)vdx^2=0$$

sì che sarà ella della forma ($\mathfrak{Q}$) in ipotesi di $M=0$.

Se dunque si faccia $e-2a\phi-2a=e'$, $f-2\phi b-2b=f'$, $a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=g'$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=h'$, sarà ella integrabile (*Art. I.*) qualvolta si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=0$$

e però negli stessi casi lo sarà pure l' equazione ($\mathfrak{Q}$) supposto $M=0$, indi (*§. VIII.*) supposto M funzione di x. Ma

ponendo $\frac{v'}{x^{\phi+1}}$ in luogo di v, l' equazione

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}(e'+fX)dvdx$$
$$+x^{\phi+1}(g'+h'X)vdx^2=0$$

si trasforma come prima in questa

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv'+x^{\phi+2}\big(e'-2a\phi-2a+(f'-2b\phi-2b)X\big)dxdv'$$
$$+x^{\phi+1}\Big(a(\phi+1)(\phi+2)-e'(f+1)+g'$$
$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'\big)X\Big)v'dx^2=0$$

la quale, posto $e'-2a\phi-2a=e''$, $f'-2b\phi-2b=f''$

$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=g''$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=h''$,

è integrabile ognivolta che abbiano luogo le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e''(\phi+1)+g''=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f''(\phi+1)+h''=0$$

Dunque negli stessi casi lo sarà pure l' equazione (Q); e così successivamente. In conseguenza progredendo in questo modo dopo m trasformazioni, si conchiuderà, che l' equazione (Q) è generalmente integrabile qualvolta si verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e^m(\phi+1)+g^m=0$$
$$b(\phi+1)(\phi+2)-f^m(\phi+1)+h^m=0$$

Ed è ben facile cosa l' ottenere le forme e^m, f^m, g^m, h^m in e, f, g, h con le sostituzioni successive, essendo generalmente

$$e^m=e^{m-1}-2a\phi-2a,\quad f^m=f^{m-1}-2b\phi-2b$$
$$g^m=a(\phi+1)(\phi+2)-e^{m-1}(\phi+1)+g^{m-1},$$
$$h^m=b(\phi+1)(\phi+2)-f^{m-1}(\phi+1)+h^{m-1}$$

III. Ma di nuovo a questi infiniti casi d' integrabilità dell' equazione (Q) altri infiniti possono aggiugnersi, come si è fatto nell' antecedente Proposizione, ricavando tre paja di equazioni dall' equazione (R), e procedendo in modo analogo a quello del §. XIX. Art. III., cosa, cui m' astengo dal fare, non implicando alcuna difficoltà.

SCOLIO.

§. XXI. L' equazione (Δ) della Prop. IX. non è che un caſo ben particolare di queſta, com' è manifeſto, cioè quando $X = x^n$, $\phi = -1$. Ma ſi può eſtendere il metodo, come ho accennato di ſopra, ad una più grande generalità cioè a tutti i gradi di queſta ſpeciale natura di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXII. *Svolgere infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione* (A)

$$(A)\quad Mdx^n = x^{m+1}(a+bX)ydx^n + x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + x^{m+4}(h+KX)d^3ydx^{n-3}$$
$$+ x^{m+5}(l+pX)d^4ydx^{n-4} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *ſono funzioni di* x, a b c e ecc. m *coſtanti a piacere*.

RISOLUZIONE.

Si faccia $y = \frac{v}{x^{m+1}}$. Soſtituito queſto valore nell' equazione (A) prende ella la forma (A')

$$(A')\ldots Mdx^n = (a+bX)vdx^n$$
$$+(c+eX)\left(xdvdx^{n-1} - (m+1)vdx^n\right)$$
$$+(f+gX)\left(x^2ddvdx^{n-2} - 2(m+1)xdvdx^{n-1}\right.$$
$$\left.+(m+1)(m+2)vdx^n\right)$$
$$+(h+KX)\left(x^3d^3vdx^{n-3} - 3(m+1)x^2ddvdx^{n-2}\right.$$
$$\left.+3(m+1)(m+2)xdvdx^{n-1} - (m+1)(m+2)(m+3)vdx^n\right)$$
$$+(l+pX)\left(x^4d^4vdx^{n-4} - 4(m+1)x^3d^3vdx^{n-3}\right.$$
$$+6(m+1)(m+2)x^2ddvdx^{n-2}$$
$$\left.-4(m+1)\ldots(m+3)xdvdx^{n-1} + (m+1)\ldots(m+4)vdx^n\right)$$

$$+(q+rX)\big(x^5d^5vdx^{n-5}-5(m+1)x^4d^4vdx^{n-4}$$
$$+10(m+1)(m+2)x^3d^3vdx^{n-3}$$
$$-10(m+1)\ldots(m+3)x^2ddvdx^{n-2}$$
$$+5(m+1)\ldots(m+4)xdvdx^{n-1}-(m+1)\ldots(m+5)vdx^n\big)$$
$$+\text{ ecc.}$$

Da questa equazione se ne combinino tre nel seguente modo

$$(B)\ldots Mdx^n=xdvdx^{n-1}\big(c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)$$
$$-4l(m+1)(m+2)(m+3)+5q(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}$$
$$+\big(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)$$
$$+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\big)X\big)$$
$$+x^2ddvdx^{n-2}\big(f-3h(m+1)+6l(m+1)(m+2)$$
$$-10q(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}+\big(g-3K(m+1)$$
$$+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}\big)X\big)$$
$$+x^3d^3vdx^{n-3}\big(h-4l(m+1)+10q(m+1)(m+2)-\text{ecc.}$$
$$+\big(K-4p(m+1)+10r(m+1)(m+2)-\text{ecc.}\big)X\big)$$
$$+\text{ ecc.}$$

$$(C)\ldots a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)(m+2)(m+3)h$$
$$+(m+1)\ldots(m+4)l-(m+1)\ldots(m+5)q+\text{ ecc.}=0$$
$$(C)\ldots b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)(m+2)(m+3)K$$
$$+(m+1)\ldots(m+4)p-(m+1)\ldots(m+5)r+\text{ ecc.}=0$$

E' certo che avendo luogo le equazioni (C), l' integrazione dell' equazione (A) dipende dall' integrazione dell' equazione (B), cioè dell' equazione (B')

$$(B')\ldots Mdx^{n-1}=xv'dx^{n-1}\big(c-2f(m+1)+\text{ecc.}\big)$$
$$+x^2dv'dx^{n-2}\big(f-3h(m+1)+\text{ecc.}\big)$$
$$+x^3ddv'dx^{n-3}\big(h-4l(m+1)+\text{ecc.}\big)+\text{ecc.}$$

in cui si trasforma l' equazione (B), posto $dv=v'dx$, e che è inferiore di un' unità all' equazione (A), cioè del grado $m-1$.

Di nuovo l' equazione (B') con la fostituzione $v' = \frac{v''}{x}$ fi cangia in questa

$$(B'')\ldots Mdx^{n-1} = v''dx^{n-1}\big(c - 2f(m+1) + 3h(m+1)(m+2) - 4l(m+1)\ldots(m+3) + 5q(m+1)\ldots(m+4) - \text{ecc.} + \big(e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)\ldots(m+3) + 5r(m+1)\ldots(m+4) - \text{ecc.}\big)X\big) + \big(f - 3h(m+1) + 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1)(m+2)(m+3) + \text{ecc.} + \big(g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2) - 10r(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.}\big)X\big)\big(xdv''dx^{n-2} - v''dx^{n-1}\big) + \big(h - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} + \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big)X\big)\big(x^2ddv''dx^{n-3} - 2xdv''dx^{n-2} + 2v''dx^{n-1}\big) + \text{ecc.}$$

dalla quale combinandone fimilmente tre, come fegue,

$$(B''')\ldots Mdx^{n-1} = xdv''dx^{n-2}\big(f - 3h(m+1) + 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} - 2h + 2.4l(m+1) - 2.10q(m+1)(m+2) + \text{ecc.} + \big(g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2) - 10q(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} - 2K + 2.4p(m+1) - 2.10r(m+1)(m+2) + \text{ecc.}\big)X\big) + x^2ddv''dx^{n-3}\big(h - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} + \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big)X\big) + \text{ecc.}$$

$$(C')\ldots c - 2f(m+1) + 3h(m+1)(m+2) - 4l(m+1)\ldots(m+3) + 5q(m+1)\ldots(m+4) - \text{ecc.} - f + 3h(m+1) - 6l(m+1)(m+2) + 10q(m+1)\ldots(m+3) - \text{ecc.} + 2h - 2.4l(m+1) + 2.10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$

$$(C')\ldots e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)(m+2)(m+3)$$

$$+5r(m+1)....(m+4) - \text{ecc.} - g + 3K(m+1)$$
$$- 6p(m+1)(m+2) + 10q(m+1)...(m+3) - \text{ecc.}$$
$$+ 2K - 2.4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$

si può tornar a conchiudere, che ognora che si verifichino le relazioni (C), (C'), la risoluzione dell'equazione (A) dipenderà da quella dell' equazione (B'''). Ma continuando simili trasformazioni, mentre il numero delle relazioni combinate tra coefficienti cresce, l'equazione da cui dipende successivamente l' integrazione dell' equazione (A) va digradando, dimodochè dopo $n-1$ trasformazioni l' equazione ultima (B^{λ}) è di primo grado che si sa integrare generalmente.

Dunque l'equazione (A) è generalmente integrabile ognora che si verifichino $n-1$ equazioni di relazioni combinate (C), (C'), (C'').....$(C^{\lambda-2})$.

II. Ma di nuovo si possono moltiplicare i casi d' integrabilità dell'equazione (A) all' infinito. Imperciocchè vi si faccia $M=0$; l' equazione (A') (*Art. preced.*) in questo caso, essendo ordinata e moltiplicata per x^{m+1}, prende la stessa forma di (A), cioè

$$0 = x^{m+1}\Big(a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)...(m+3)h$$
$$+(m+1)...(m+4)l-(m+1)...(m+5)q+\text{ecc.}$$
$$+\big(b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)...(m+3)K$$
$$+(m+1)...(m+4)p-(m+1)...(m+5)r+\text{ecc.}\big)X\Big)vdx^{n}$$
$$+x^{m+2}\Big(c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)$$
$$-4l(m+1)...(m+3)+5q(m+1)...(m+4)-\text{ecc.}$$
$$+\big(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)...(m+3)$$
$$+5r(m+1)...(m+4)-\text{ecc.}\big)X\Big)dvdx^{n-1}$$
$$+x^{m+3}\Big(f-3h(m+1)+6l(m+1)(m+2)$$
$$-10q(m+1)...(m+3)+\text{ecc.}+\big(g-3K(m+1)$$
$$+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)...(m+3)$$
$$+\text{ecc.}\big)X\Big)ddvdx^{n-2}+\text{ecc.}$$

cioè la forma (A'')

$$(A'')\ldots 0 = x^{m+1}(a' + b'X)v\,dx^n + x^{m+2}(c' + e'X)dv\,dx^{n-1} + x^{m+3}(f' + g'X)ddv\,dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

posto

$$a' = a - (m+1)c + (m+1)(m+2)f - (m+1)\ldots(m+3)h + \text{ecc.}$$

$$b' = b - (m+1)e + (m+1)(m+2)g - (m+1)\ldots(m+3)K + \text{ecc.}$$

$$c' = c - 2f(m+1) + 3h(m+1)(m+2) - 4l(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.}$$

$$e' = e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.}$$

ecc.

Similmente l'equazione (A'') con la sostituzione $v = \frac{v'}{x^{m+1}}$ si trasforma nell' equazione (A''')

$$(A''')\ldots 0 = x^{m+1}(a'' + b''X)v'dx^n + x^{m+2}(c'' + e''X)dv'dx^{n-1} + x^{m+3}(f'' + g''X)ddv'dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a'' = a' - (m+1)c' + (m+1)(m+2)f' - (m+1)\ldots(m+3)h' + \text{ecc.}$$

$$b'' = b' - (m+1)e' + (m+1)(m+2)g' - (m+1)\ldots(m+3)K' + \text{ecc.}$$

$$c'' = c' - 2f(m+1) + 3h'(m+1)(m+2) - 4l'(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.}$$

e questa, con la sostituzione $v' = \frac{v''}{x^{m+1}}$, nell'equazione (A'''')

$$(A'''')\ldots 0 = x^{m+1}(a''' + b'''X)v''dx^n + x^{m+2}(c''' + e'''X)dv''dx^{n-1} + x^{m+3}(f''' + g'''X)ddv''dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a''' = a'' - (m+1)c'' + (m+1)(m+2)f'' - (m+1)\ldots(m+3)h'' + \text{ecc.}$$

$$b''' = b'' - (m+1)e'' + (m+1)(m+2)g'' - (m+1)\ldots(m+3)K'' + \text{ecc.}$$

ecc. e così all' infinito.

Se dunque l' equazione (A) s' integra generalmente per l' Articolo preced. ognora che abbia luogo il sistema di relazioni tra' coefficienti (C), (C'), ... $(C^{\lambda-2})$, per la stessa ragione potrà generalmente integrarsi l' equazione (A''), sempre che si verifichi il seguente sistema di relazioni

$$(CC)\ldots a' - (m+1)c' + (m+1)(m+2)f' - (m+1)\ldots(m+3)h' + \text{ecc.} = 0$$

(CC)

$$(CC)\ldots b' - (m+1)e' + (m+1)(m+2)g'$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)K' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C')\ldots c' - 2f'(m+1) + 3h'(m+1)(m+2)$$
$$- 4l(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} = 0$$
$$(C'C')\ldots e' - 2g'(m+1) + 3K(m+1)(m+2)$$
$$- 4p(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} = 0$$

ecc.

Nello ſteſſo modo ſi può conchiudere, che l'equazione (A''') potrà integrarſi qualvolta abbia luogo il ſeguente ſiſtema di relazioni

$$(CCC)\ldots\ldots a'' - (m+1)c'' + (m+1)(m+2)f''$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)h'' + \text{ecc.} = 0$$
$$(CCC)\ldots\ldots b'' - (m+1)e'' + (m+1)(m+2)g''$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)K'' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C'C')\ldots\ldots c'' - 2f''(m+1) + 3h''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$
$$(C'C'C')\ldots\ldots e'' - 2g''(m+1) + 3K''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$

ecc.

E così ſucceſſivamente per tutte le altre trasformate $(A^{v''})$, (A'''''') ecc. all' infinito.

Dunque in tutti queſti infiniti ſiſtemi di relazione tra' coefficienti ſarà ſempre integrabile l' equazione generale

$$Mdx^n = x^{m+1}\big(a+bX\big)ydx^n + x^{m+2}\big(c+eX\big)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}\big(f+gX\big)ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in ſuppoſizione di $M=0$. Ma eſſendolo in queſta ſuppoſizione, lo ſarà pure in quella di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Il che ecc.

DELLE PROGRESSIONI RECIPROCHE
DELLE POTENZE AFFETTE

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

E' Tanto impenetrabile il valore delle progressioni reciproche di questa forma

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{aK^n \pm b}$$

che l' illustre *Eulero* non dubitò di dire nel VI. Vol. de' primi Com. di Pietrob. pag. 97 „ *Quamvis vero hæc methodus tam late pateat, tamen innumeræ occurrere possunt progressiones per eam non summabiles, quarum quidem vel nullo alio modo summæ assignari possunt, ut hujus*

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{2^n - 1}$, che è pur un caso particolare e semplicissimo della forma precedente. In fatti non sappiamo finora nè trattarle, nè esprimerle per alcun modo. Vo' credere pertanto non discaro a' Geometri il veder fatto un primo passo in questo gineprajo, e suggettata la somma di questa, e d' infinite altre progressioni di tal indole ad una qualche espressione finita. Non è facile per verità l' avvisarsi, che il maneggio di loro si riduce al far passaggio da quantità esponenziali reali a' seni e coseni d' archi immaginarj, se un' occasione propizia non concorra a mostrarcelo a dito. E tanto più che non è in uso questo passaggio come l' altro comune e trito dalle quantità esponenziali immaginarie a' seni e coseni d' archi reali. Ma restava ancora un nodo assai più difficile da sciorsi, dovendo l' analista rintracciare un metodo in appresso, onde sommare le serie reciproche de' seni e coseni, che mancava totalmente. Così fosse tra' vivi quel gran Maestro, cui le Scienze Matematiche, l' Analisi più fina e complicata, e il più de' Geometri viventi d' ogni Nazione debbono i lumi più preziosi, l' avanzamento attuale,

e innumerabili aperture a' nuovi progressi, come son certo, che avrebbe onorato quest' indagine di qualche attenzione.

§. I.

Sia la serie (μ)

$$(\mu)\ldots\ldots\frac{A}{K-1}+\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^3-1}\ldots\ldots\frac{A}{K^x-1}$$

in cui A è una quantità invariabile qualunque, K una quantità qualunque maggiore dell' unità, e x l'esponente de' termini. Essendo arbitraria la base de' logaritmi, sarà lecito il prendere per base logaritmica la grandezza K, che che ella siasi, e sarà sempre $l.1=0$, $l.K=1$, $l.K^2=2$ ecc. e sarà facile il passaggio dal sistema de' logaritmi con la base K al sistema comune delle Tavole. In conseguenza, se sia π la semicirconferenza di un cerchio che ha l' unità per raggio, e la lettera ω rappresenti la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, sarà pe' noti Canoni

$$\text{sen.}\, m\pi=\left(K^{m\pi\omega}-K^{-m\pi\omega}\right):2\omega,\quad \text{cos.}\, m\pi=\frac{1}{2}\left(K^{m\pi\omega}+K^{-m\pi\omega}\right);$$

e posto $m\pi=\frac{x}{\omega}$, rappresentando x una grandezza reale; sarà $2\omega\,\text{sen.}\,x:\omega=K^x-K^{-x}$, $2\,\text{cos.}\,x:\omega=K^x+K^{-x}$, sì che ove nelle precedenti formule si esprimono per quantità esponenziali immaginarie seni e coseni d' archi reali, in queste sono espressi seni e coseni d' archi immaginarj per quantità esponenziali reali. Ciò premesso si faccia passaggio dalle dirette alle espressioni reciproche, e sarà

$$\frac{1}{2^\omega\,\text{sen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-K^{-x}}=\frac{1}{K^{2x}-1};\quad \frac{1}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^{2x}+1}.$$

Ma $\frac{K^x}{K^{2x}-1}=\frac{K^x}{(K^x-1)(K^x+1)}$; dunque $\frac{K^x-1}{2\omega K^x\,\text{sen.}\,x:\omega}$ $=\frac{1}{K^x+1}$; $\frac{K^x+1}{2\omega K^x\,\text{sen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-1}$, e però essendo $\frac{1}{K^x\pm 1}$ il termine generale di una serie, sarà questa serie uguale a quella, che ha $\frac{K^x\mp 1}{2\omega K^x}\times\frac{1}{\text{sen.}\,x:\omega}$ per termine generale, fa-

cendo che K rappresenti la base logaritmica . Se dunque il simbolo $S.T$ esprima la somma della serie, di cui T è il termine generale; sarà generalmente

$$S.\frac{A}{K^x \pm 1} = S.\frac{A(K^x \mp 1)}{2\omega K^x} \times \frac{1}{\text{sen.}\, x:\omega};\ S.\frac{AK^x}{K^{2x}-1} = S.\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\, x:\omega};\ S.\frac{AK^x}{K^{2x}+1} = S.\frac{A}{2\,\text{cos.}\, x:\omega}$$

§. II.

Ed ecco intanto la somma della serie del Sig. *Eulero*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} \ldots\ldots \frac{1}{2^x - 1}$$

felicemente ridotta alla somma d' una serie, che ha per termine generale $\frac{2^x + 1}{\omega 2^{x+1}} \times \frac{1}{\text{sen.}\, x:\omega}$, essendo il 2 la base de' logaritmi.

§. III.

Accignamoci ora a determinare la somma in genere delle serie aventi sì fatte espressioni per termine generale. E' noto che le serie reciproche de' seni, e coseni ecc. d' archi procedenti in arimmetica progressione non erano state tocche da alcuno, e molto meno nel caso, che involgessero, come qui accade, moltiplicatori esponenziali. Il primo cimento in questa materia è quello, che ho fatto pubblico nel I. Vol. della *Società Italiana* nella Dissertazione intorno alle serie al Cap. X. pag. 368, avendo ivi ridotto tali somme alle leggi del Calcolo Integrale. A quel metodo pertanto soggetteremo anche queste più difficili, ed altre analoghe così, facendo vedere come da quelle espressioni integrali si passi non difficilmente a quantità sviluppate, e finite. Si riprenda da quel luogo la formula

$$\int \frac{z^m + z^{n-m}}{1 + z^n} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{n\,\text{sen.}\,\frac{m\pi}{n}}$$

da integrarsi da $z=0$ fino a $z=1$, in cui π è la semicirconferenza di un cerchio, che ha l' unità per raggio. Facendo $n=1$, $m\pi=x:\omega$, come nel I. §., e posto $\omega\pi=a$ per semplicità, si avrà generalmente

$$\frac{A}{\pi}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{\text{sen.}\,x:\omega}$$

In conseguenza (§. I.)

$$(P)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^x}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}+\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^x}\int\frac{z^{x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\pm\frac{A}{2aK^x}\int\frac{z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{K^x\mp1},$$ posta K qualunque la base de' logaritmi. Ora si richiami il metodo nostro di sommare le serie citato qui sopra, e però si moltiplichi, e si divida il primo termine per $1-z^{1:a}$, il secondo per $1-z^{-1:a}$ sotto il segno integrale. Sarà

$$(Q)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

la forma differenziale del primo; e la forma differenziale del secondo sarà

$$(R)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a-1:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Similmente si moltiplichi, e si divida il terzo termine per $1-\frac{z^{1:a}}{K}$, il quarto per $1-\frac{z^{-1:a}}{K}$ sotto il segno integrale; si avrà per forma differenziale del terzo la seguente espressione

$$(S)\ldots\pm\frac{A}{2aK^x}\int\frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp\frac{A}{2aK^{x+1}}\int\frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e la seguente

$$(T)\ldots\pm\frac{A}{2aK^n}\int\frac{z^{1-n:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp\frac{A}{2aK^{n+1}}\int\frac{z^{1-n:a-1:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

per forma differenziale del quarto. Si faccia $x=1$ ne' primi termini de' primi binarj ($\mathfrak{Q}$) (R), e riducendo sarà l'espressione (D)

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(z^{1:a}+z^{1-n:a})(1-z^{n:a})}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}\ldots\ldots(D)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il primo termine della formula (P). Operando similmente sopra i secondi binarj (S), (T), si troverà essere l' espressione ridotta (E)

$$\pm\frac{A}{2aK^n}\int\left(\frac{z^{1:a}(K^n-z^{n:a})}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{z^{1-n:a}(K^nz^{n:a}-1)}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)\frac{dz}{z}\ldots(E)$$

la somma generale della serie avente per termine generale il secondo termine della formula (P). Dunque col mezzo delle due espressioni (D), (E) nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione si otterrà la somma generale della serie di cui è termine generale $\frac{A}{K^n\mp 1}$; e posto poi $x=\infty$ si avrà la somma della serie all' infinito, ch' è il caso in quistione.

Ora essendo $a=\omega\pi=\pi\sqrt{-1}$, e $x:a=x:\pi\sqrt{-1}$ lo stesso che $\frac{-x\sqrt{-1}}{\pi}$, la formula (D) diverrà

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{nx:\pi})(1-z^{n:\omega\pi})dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}$$

e nel caso contemplato di $x=\infty$, essendo z prima dell'integrazione minore dell' unità, tanto $z^{nx:\pi}$ quanto $z^{n:\omega\pi}$ sarà sotto il segno quantità infinitamente piccola, e però per le serie all' infinito l' espressione (D) prenderà la forma

$$\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}\ldots\ldots(M)$$

Nello stesso modo proveremo, che l' espressione (E) diverrà

$$\pm \frac{A}{2aK^n}\int\left(\frac{K^n z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{K^n dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)=$$

$$\pm \frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\pm\frac{A}{2a}\int\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\ldots.(N)$$

nel caſo di $x=\infty$

§. IV.

Il paſſo fatto è quello pertanto di eſſere da neſſuna immaginabile eſpreſſione finita pervenuti a trovarne una per queſta ſorta di progreſſioni, che può almeno coſtruirſi e ridurſi a rettificazione, o quadratura finita di qualche curva, ſe ſi voleſſe, eſſendo ſtraniſſima preteſa il volere, che tutto ſi abbia a ridurre a funzioni d' archi o d' iperbole comuni, quaſi tutte le traſcendenze doveſſero eſſere di una ſola natura. Se foſſe lecito il traſcurare un reſiduo finito nelle diviſioni ſpinte all' infinito, le formule trovate potrebbero trasformarſi in funzioni traſcendenti familiari in queſto modo. Si faccia $z^{1:a}=y$, e farà

$$\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}=\int\frac{ady}{(1-y)(1+y^a)}=\int\frac{ady}{1+y^a-y-y^{a+1}}$$

Ma la frazione

$$\frac{1}{-y^{a+1}-y+y^a+1}=-\frac{1}{y^{a+1}}+\frac{1}{y^{2a+1}}-\frac{1}{y^{3a+1}}+\frac{1}{y^{4a+1}}-\text{ecc.}$$

non computando l' ultimo reſiduo $\frac{1}{y}$ che riſulta inoltrando all' infinito la diviſione. Moltiplicando dunque per ady, e integrando ſi avrà

$\frac{y^{-a}}{1}-\frac{y^{-2a}}{2}+\frac{y^{-3a}}{3}-\frac{y^{-4a}}{4}+$ ecc.; ſoſtituendo il valore di y in z, e ponendo $z=1$, perchè meſſo $z=0$, tutto ſvaniſce, ſi avrà (μ) pel valore della formula (D) nel caſo di $x=\infty$, e di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè della formula (M)

$$\frac{A}{2a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{ecc.}\right)\ldots..(\mu)$$

Ma K è la base, che abbiamo assunto pe' logaritmi iperbolici; ed è noto, che prendendo nelle tavole ordinarie il logaritmo iperbolico L di qualunque quantità K, e il logaritmo pure d' altra quantità qualsivoglia m, se si divida il $l.m$ per L, il quoziente è il logaritmo iperbolico della quantità m con la base K.

Essendo dunque

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ ecc. con la base } e = 2.718281828459 \text{ ecc.}$$

e $L = l.K$ con la stessa base e, sarà $\frac{l.2}{L} = \frac{l.2}{l.K}$ il logaritmo del numero 2 con la base K, cioè il valore della serie nel caso nostro. E perciò $\frac{A}{2a} \cdot \frac{l.2}{l.K} = \frac{Al.2}{2\pi\sqrt{-1}\, l.K}$ sarebbe il valore per approssimazione dell'espressione integrale (M), essendo π la semicirconferenza d' un cerchio avente l' unità per raggio. Passiamo ora dagli esponenti immaginarj agli archi reali, e però essendo K la base de' logaritmi iperbolici, sarà

$$K^{2\pi\sqrt{-1}\, l.K} = \text{cos}.\, 2\pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen}.\, 2\pi l.K$$

$= (\text{cos}.\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen}.\, \pi l.K)^2$, e però facendo ripassaggio ai numeri, sarà

$$2\pi\sqrt{-1}\, l.K = 2l.(\text{cos}.\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen}.\, \pi l.K)$$

Ma questo logaritmo iperbolico è con la base K; dunque dividendolo per l.K riferito alla base comune e, si avrà finalmente pel valore dell' espressione (D) ne' casi contemplati di $x = \infty$, e di $z = 1$, dopo l' integrazione, la formula (D')

$$(D') \ldots \frac{Al.2\; l.K}{2l.(\text{cos}.\, \pi l.K + \sqrt{-1}\, \text{sen}.\, \pi l.K)}$$

in cui K è il numero assoluto qualunque delle nostre serie maggiore dell' unità, e i logaritmi sono tutti gli ordinarj iperbolici riferiti alla base e.

Ma procedendo con un simile metodo integreremo per approssimazione la formula (N) in questa guisa, trascurando l' ultimo residuo giunta la divisione all' infinito. Si faccia, come prima, $z^{1:a} = y$ nel primo membro, e si avrà

$z^{1:a-1}dz$

$$\int \frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \int \frac{ady}{Ky^a + K - y - y^{a+1}},$$ e però

$$\frac{1}{Ky^a + K - y - y^{a+1}} = \frac{1}{Ky^a} - \frac{1}{Ky^{2a}} + \frac{1}{Ky^{3a}} - \frac{1}{Ky^{4a}} + \text{ecc.}$$ all' infinito. Moltiplicando dunque per ady, integrando, sostituendo il valore per y in z, e ponendo $z = 1$, sarà in questo caso

$$\int \frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} = \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-2a} + \frac{1}{1-3a}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1-4a} + \text{ecc.}\right).$$ Similmente essendo pel secondo membro

$$\frac{1}{Kz^{1:a+1} + Kz^{1:a} - 1 - z} = \frac{1}{Kz^{1:a+1}} - \frac{1}{Kz^{1:a+2}} + \frac{1}{Kz^{1:a+3}} - \text{ecc.}$$ all' infinito, sarà moltiplicando per dz, e integrando da $z = 0$ fino a $z = 1$

$$\int \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1+z)} = -\frac{a}{K} + \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.}\right);$$

dunque $\int \left(\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)} + \frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)$ uguaglierà nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$-\frac{a}{K} + \frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1-2a} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1-3a}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+3a} - \text{ecc.}\right) = -\frac{a}{K} + \frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1-2a)(1+2a)} + \frac{1}{(1-3a)(1+3a)} - \text{ecc.}\right)$$

Si ricorra pertanto al metodo nostro di sommare le serie (Mem. della *Soc. Italiana* Vol. I. Probl. XI.), e si tragga pel caso di due fattori al denominatore l' integrale per la somma generale di questa serie a segni alternativi

$$\frac{1}{nq}\int z^{p:q - m:n - 1}dz \int z^{m:n}dz \left(\frac{1-z^x}{1+z}\right)$$

il quale per la somma all' infinito, essendo spezzato e ridotto, si trasforma in questo

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1+z}$$

da integrarsi da $z=0$ fino a $z=1$.

Ora nel caso nostro, essendo nel termine generale

$$\frac{1}{(m+nx)(p+qx)}=\frac{1}{(1-ax)(1+ax)},\ m=p=1,\ n=-a,$$

$q=a$, l' integrale diverrà $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}$. Ma quest' integrale nasce dalla differenza de' due seguenti integrali

$$+\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}$$; ed è

poi $\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}=\int z^{1:a-1}dz=az,\ =a$, posto $z=1$, e in simil caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{sen.}\,\pi:a}$$

(Com. nuovi di *S. Pietrob.* Vol. XIX. pag. 32.). Dunque

l' integrale nostro $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}=-\frac{\pi}{2a\,\text{sen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}$.

In conseguenza questo sarà pure il valore della nostra serie

$$\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\ldots\ \frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$$

e perciò

$$-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\right)$$

$$=-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{-\pi}{2a\,\text{sen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}\right)=\int\left(\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\right.$$

$+\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}$), posto $z=1$ dopo l' integrazione.

Ma moltiplicando per $\pm\frac{A}{2a}$ quest' espressione integrale, si ha l' espressione superiore (N), cioè l' espressione (E) nel caso di $x=\infty$. Dunque il valore di quell' espressione nel caso di $x=\infty$, e di $z=1$ dopo l' integrazione sarà

$$\pm\frac{A}{2a}\left(-\frac{A}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{-\pi}{2a\,\text{sen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}\right)\right)=\mp\frac{A\pi}{2aK\,\text{sen.}\,\pi:a}$$

e posto per a il suo valore $\pi\sqrt{-1}$ si avrà

$$\mp\frac{A}{2K\sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\pi:\sqrt{-1}}.$$

Ma è K la base de' logaritmi per supposizione; dunque passando dagli archi immaginarj alle quantità esponenziali reali, come nel principio di questo §., sarà

$$\mp\frac{A}{2K\sqrt{-1}\,\text{sen.}\,\pi\sqrt{-1}}=\mp\frac{AK}{K(K^2-1)}=\mp\frac{A}{K^2-1}\ldots(E')$$

e perciò per un' approssimazione sarà

$$(D')\mp(E')=S.\frac{A}{K^x\mp 1}$$

§. V.

Ma contentandoci della riduzione scoperta al §. III., e ripigliando le somme esatte, sarà $(M)+(N)$ la somma della serie

$$\frac{A}{K-1}+\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^3-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^x-1}$$

e $(D)+(E)$ la somma generale; sì che posto $A=1$, $K=2$, si avrà tosto la somma della serie del Sig. *Eulero*, e $(M)-(N)$ la somma della serie

$$\frac{A}{K+1}+\frac{A}{K^2+1}+\frac{A}{K^3+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^x+1}$$

e $(D)-(E)$ la somma generale. Parimenti sommando, e riducendo sarà (M) la somma della serie

$$\frac{AK}{K^2-1}+\frac{AK^2}{K^4-1}+\frac{AK^3}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{2x}-1}$$

e (D) la ſomma generale.

E perchè $\frac{A}{K^x-1}-\frac{A}{K^x+1}=\frac{2A}{K^{2x}-1}$, ſarà (N) la ſomma della ſerie

$$\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^4-1}+\frac{A}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^{2x}-1}$$

ed (E) la ſomma generale.

§. VI.

Eſſendo poi $\frac{A}{K^x-1}+A=\frac{AK^x}{K^x-1}$, e $A-\frac{A}{K^x+1}=\frac{AK^x}{K^x+1}$, ſi avrà l' aggregato $(D)+(E)+Ax$ per ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK}{K-1}+\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^3}{K^3-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^x-1}$$

e l' aggregato $Ax-(D)+(E)$ ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK}{K+1}+\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^3}{K^3+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^x+1}$$

In conſeguenza $Ax+(E)$ ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^4}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^{2x}}{K^{2x}-1}$$

§. VII.

Di nuovo eſſendo

$$\frac{1}{\text{ſen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{1}{\text{coſ.}\,\frac{\pi x}{2p}}$$

ſe ſi faccia $2p=\pi\omega=a$ (§. *III.*), ſarà

$$\frac{1}{\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\text{cos.}\,x:\omega}$$

Dunque $S.\frac{1}{\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=S.\frac{1}{\text{cos.}\,x:\omega}$, e però moltiplicando i membri per $\frac{A}{2\omega}$ sarà parimenti

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}\,S.\frac{A}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}$$

Ora essendo l' espressione (D) (§. V.) la somma generale della serie, che ha per termine generale $\frac{AK^x}{K^{2x}-1}=\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\,x:\omega}$ (§. I.), se si metta in (D) $\frac{a}{2}-x$ in luogo di x sì che (D) diventi $(D_{,})$, sarà

$$(D_{,})=S.\frac{A}{2\omega\,\text{sen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}S.\frac{A}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}$$

Ma $\frac{1}{2\,\text{cos.}\,x:\omega}=\frac{AK^x}{K^{2x}+1}$ (§. I.). Dunque $\omega(D_{,})$ sarà la somma generale della serie

$$\frac{AK}{K^2+1}+\frac{AK^2}{K^4+1}+\frac{AK^3}{K^6+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{2x}+1}$$

posta K qualunque la base de' logaritmi iperbolici.

§. VIII.

Quindi possiamo ricavare il modo di ridurre a legge le somme di altre innumerabili serie, che non erano state soggettate a verun calcolo per l' innanzi. Potremo pertanto sommare la serie

$$\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^4}{K^4+1}+\frac{AK^6}{K^6+1}\dots\dots\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}$$

in queſto modo, qualunque coſa ſieno A e K, purchè K ſia maggiore dell' unità.

Eſſendo $\frac{\text{ſen.}\,x:\omega}{\text{coſ.}\,x:\omega}=\text{tang.}\,x:\omega$ ſi ſoſtituiſcano pel ſeno, e coſeno i valori corriſpondenti eſponenziali, poſta K la baſe de' logaritmi iperbolici, e ſarà

$$\text{tang.}\,x:\omega=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^x-K^{-x}}{K^x-K^{-x}}\right)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^{2x}-1}{K^{2x}+1}\right)$$

Ma la ſomma della ſerie

$$\text{tang.}\,1:\omega+\text{tang.}\,2:\omega+\text{tang.}\,3:\omega\dots\dots\text{tang.}\,x:\omega$$

è $\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\,(1-z^x)\,(z^{-x-1}-1)}{(1-z)\,(1-z^{\pi:a})}=(F)$

(Mem. della *Soc. Italiana* pag. 300.) poſta $a=1:\omega$; e ſe nelle due eſpreſſioni (D), (E) del §. III. ſi metta $2x$ in luogo di x, sì che (D) diventi (D''), (E) diventi (E''), ſi trova eſſere $(D'')-(E'')=AS.\frac{1}{K^{2x}+1}$. Dunque eſſendo

$$\omega S.\,\text{tang.}\,x:\omega=S.\frac{K^{2x}}{K^{2x}+1}-S.\frac{1}{K^{2x}+1},\ \text{ſarà}$$

$$A\omega(F)+S.\frac{A}{K^{2x}+1}=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)+(D'')-(E'')$$

Ma ſi è trovato (§. VI.) $Ax-(D)+(E)=S.\frac{AK^x}{K^x+1}$; dunque mettendo, come qui innanzi, $2x$ in luogo di x, ſarà parimenti $2Ax-(D'')+(E'')=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)+(D'')-(E'')$, e però avrà luogo nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione l' equazione ſeguente

$$2Ax-A\omega(F)-2(D'')+2(E'')=0$$

Similmente ſommeremo la ſerie

$$\frac{AK^3}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^8-1}+\frac{AK^9}{K^{12}-1}\dots\dots\frac{AK^{3x}}{K^{4x}-1}$$

giacchè il termine generale ſi riſolve ne' due termini generali particolari

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x}-1)}+\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$$

ed è $\frac{1}{2}(D)=S.\frac{AK^x}{2K^{2x}-1}$ (§. V.), e $\frac{\omega}{2}(D_{,})=S.\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$ (§. VII.). Nello ſteſſo modo conſeguiremo la ſomma della ſerie

$$\frac{AK}{K^4-1}+\frac{AK^2}{K^8-1}+\frac{AK^3}{K^{12}-1}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{4x}-1}$$

riſolvendoſi il termine generale di lei ne' due termini

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x}-1)}-\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$$

§. IX.

Ma veggiamo di ſpignere più oltre la generalità per altra via, ſenza farlo a parte a parte combinando le eſpreſſioni ritrovate. Il faremo ſopra alcune forme principali, e reſterà così fatta ſtrada a chi voleſſe applicare il metodo a caſi particolari ſecondo l' occorrenza. Si ripigli perciò la formula $\frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,x:\omega}=\frac{K^x}{K^{2x}-1}$ (§. I.), e poſto $p+qx$ in luogo di x, affinchè gli eſponenti poſſano procedere in qualunque progreſſione aritmetica, dando i valori convenienti a p, e q, ſommeremo generalmente le ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}-1}+\frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Si ricorra dunque alla noſtra Memoria nel I. Vol. della *Società* pag. 369; ed eſſendoſi ivi determinata la ſomma della ſerie avente per termine generale $\frac{1}{\text{ſen.}\,(p+qx)\,a}$, vi ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, e ſi moltiplichi l' eſpreſſione per A, e la ſi divida per 2ω; ſarà

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\,(p+qx):\omega}=S.\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1}$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(1 - z^{qx})(z^{p+q} + z^{\pi\omega - p - qx})}{(1 - z^{q})(1 + z^{\pi\omega})} \cdot \frac{dz}{z} = (\mathfrak{Q})$$

Di nuovo essendo (§. I.) $\frac{1}{2\,\text{cos}.\,x:\omega} = \frac{K^{x}}{K^{2x}+1}$, e

$$S.\,\frac{1}{\text{cos}.\,(p+qx)\,a} = \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a}(1 - z^{qx})(z^{-p-qx} + z^{p+q})}{(1 - z^{q})(1 + z^{\pi:a})} \cdot \frac{dz}{z} = (R)$$

per semplicità di calcolo (ivi pag. 370), si metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a nell'espressione (R) sì che diventi (R'), $p + qx$ in luogo di x nell' espressione $\frac{1}{2\,\text{cos}.\,x:\omega} = \frac{K^{x}}{K^{2x}+1}$, sarà

$$S.\,\frac{A}{2\,\text{cos}.\,(p+qx):\omega} = \frac{A}{2}(R') = S.\,\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1},$$ ch'è la somma delle serie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}+1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}+1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1}$$

§. X.

Inoltre sommeremo con pari generalità le serie aventi per termini generali le espressioni

$$\frac{K^{2(p+qx)}-1}{K^{2(p+qx)}+1},\quad \frac{K^{2(p+qx)}+1}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Imperciocchè essendo $\frac{\text{sen}.\,x:\omega}{\text{cos}.\,x:\omega} = \text{tang}.\,x:\omega = \frac{1}{\text{cos}.\,x:\omega} : \frac{1}{\text{sen}.\,x:\omega}$,

sarà $\frac{1}{2\,\text{cos}.\,(p+qx):\omega} : \frac{1}{2\omega\,\text{sen}.\,(p+qx):\omega}$

$$= \omega\,\text{tang}.\,(p+qx):\omega = \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1} : \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1} = \frac{K^{2(p+qx)}-1}{K^{2(p+qx)}+1}$$

Ma ripigliando la somma della serie tang. $(p+qx)\,a$ deter-

minata

minata nelle Mem. sopraccitate alla pag. 368, e ponendo $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a sarà

$$A\omega^2 \int \frac{z^{\pi\omega:2}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega:2})} \cdot \frac{dz}{z}$$

la somma della serie

$$\frac{AK^{2(p+q)}-A}{K^{2(p+q)}+1} + \frac{AK^{2(p+2q)}-A}{K^{2(p+2q)}+1} + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}-A}{K^{2(p+qx)}+1}$$

Similmente essendo

$$\frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1} : \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1} = \frac{1}{2\omega\,\text{sen.}(p+qx):\omega} : \frac{1}{2\,\text{cos.}(p+qx):\omega}$$

$= \frac{1}{\omega\,\text{tang.}(p+qx):\omega}$, se nell' espressione della somma di $\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)\,a}$ (ivi pag. 371) si metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, sarà

$$A \int \frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi\omega-p-qx})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega})} \cdot \frac{dz}{z}$$ nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione la somma generale della serie

$$\frac{AK^{2(p+q)}+A}{K^{2(p+q)}-1} + \frac{AK^{2(p+2q)}+A}{K^{2(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}+A}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Di nuovo poichè $\frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}-1)} + \frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}+1)}$

$= \frac{K^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$, sarà manifestamente $\frac{A}{2}(Q) + \frac{A}{4}(R')$ la somma della serie

$$\frac{AK^{3(p+q)}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{3(p+2q)}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

Nello stesso modo si troverà essere $\frac{A}{2}(Q) - \frac{A}{4}(R')$ la somma generale della serie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{p+qx}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

§. XI.

Veduto di una natura di potenze reciproche affette, resta che si faccia per occasione parola di un altro genere di simili potenze. In quelle che abbiamo maneggiato finora, assunto che siasi un numero qualunque per K, come base de' logaritmi iperbolici, egli è radice costante delle potenze successive d' ogni termine nella serie proposta. All' opposito è d' un' altra natura la serie, ne' di cui termini è bensì costante l' esponente delle potenze, ma la radice varia in ogni termine rappresentando ella l' esponente successivo de' termini, come sarebbe per esempio la famiglia delle serie espresse dalla formula $\frac{A}{ax^m \pm b}$. Non abbiamo, ch' io sappia, altri tentativi su quest' indole di serie, fuorchè alcuni di *Leibnitz*, di Jacopo *Bernoulli*, e di Leonardo *Eulero*, e niente più che oltrepassi le seconde potenze. Il primo negli Atti di Lipsia in occasione di parlare della quadratura del cerchio fa menzione di alcune serie infinite reciproche de' quadrati de' numeri naturali scemati di un' unità, tenendo secreto il metodo misteriosamente. Il secondo trova i valori delle stesse serie, essendo scemati i medesimi quadrati in genere di un comune quadrato, e quei pure di serie reciproche aventi al denominatore numeri trigonali diminuiti d' un costante numero trigonale nel Trattato delle serie infinite posto in calce del Libro che ha per titolo *Ars conjectandi*. L' *Eulero* finalmente nel I. Vol. dell' Analisi degl' Infiniti §. §. 181. 182. somma le serie aventi per termine generale $\frac{1}{n^2x^2 - m^2}$, ove x è l' esponente de' termini.

Come da principio avea preso a credere, che simili serie fossero astruse, così mi feci a tentare la somma di loro all' infinito per una via, che mi condusse a farle dipendere dalle serie conosciute a fattori sempre crescenti. Ma tutto ad un tratto riconobbi, che non le sole seconde potestà maneggiate da' tre nominati illustri uomini, ma generalmente tutta questa Classe di serie, qualunque sieno le potestà, e co-

munque affette, è reducibile a quelle, di cui ho trattato nel V. Capitolo della Mem. citata intorno alle ſerie, e non richieggono al più, che le note quadrature dell' iperbola, e del cerchio, qualor non ſono algebraicamente ſommabili. Queſto ſchiaramento mi fè vedere, che non ſempre i più ſemplici e migliori penſieri ſono i primi ad offerirſi, di che ſi può avere una prova anche in queſto caſo rivedendo attentamente ciò che ne hanno laſciato *Leibnitz*, *Bernoulli*, ed *Eulero* ſucceſſivamente. Ma mi ſia conceduto di paſſar prima di ſuga ſul primo tentativo, perchè ottenendo altri riſultamenti col metodo più ſemplice e naturale, i quali debbono in fondo coincidere co' primi, ſi potrà trarne qualche nuova verità non diſpregevole.

Sia primamente da ſommarſi la ſerie infinita

$$(A) \ldots\ldots \frac{1}{1+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{9+1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{x^2+1}$$

S' inſtituiſca la continua diviſione del termine generale, e ſi avrà

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ecc.}$$

Se dunque poteſſero averſi le ſomme all' infinito $S.\frac{1}{x^2}$, $S.\frac{1}{x^4}$ ecc. e tutte inſieme eſpreſſe per una ſola quantità finita M, ſarebbe $M = S.\frac{1}{x^2+1}$. Ricorriamo dunque alla Mem. noſtra intorno alle ſerie citata qui innanzi, e alla pag. 304 troveremo eſſere nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$S.\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)$$

$$S.\frac{1}{x^4} = \frac{1}{1.2.3}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^3$$

$$S.\frac{1}{x^6} = \frac{1}{1.2\ldots.5}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^5$$

. . . .

$$S.\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{1.2....(-1+2n)}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^{-1+2n}$$

Posto pertanto $l.\frac{1}{z}=Z$ per semplicità di calcolo, sarà

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z}{1}-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\frac{Z^7}{1.2....7}+\text{ecc.}\right)=S.\frac{1}{x^2+1}$$

Ma $Z-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\text{ecc.}.....=\text{sen.}Z$ in un cerchio avente l' unità per raggio. Dunque

$$\int\frac{dz}{1-z}\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)=S.\frac{1}{x^2+1}$$

ch' è la somma ricercata all' infinito della serie (*A*)

§. XII.

Ma il valore di questa serie trovato dal Sig. *Eulero* alla pag. 143, posto -1 in luogo di a, è $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}$. Dunque abbiamo questo nuovo Teorema, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{dz}{1-z}\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2};$$

ma $\frac{1}{2\omega\,\text{sen.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}-1}$ (§. I.), posto $\omega=\sqrt{-1}$, m quantità reale, K la base de' logaritmi; e $\frac{1}{2\,\text{cos.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}+1}$; e inoltre, essendo $\frac{\text{cos.}\,m:\omega}{\omega\,\text{sen.}\,m:\omega}=\frac{1}{\omega\,\text{tang.}\,m:\omega}$, se facciasi $\frac{m}{\omega}=\pi\omega$, sarà $m=-\pi$, e $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}=\frac{m}{2\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,m:\sqrt{-1}}$

$$= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\omega \operatorname{tang.} m:\omega} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{K^{2m}+1}{K^{2m}-1} \right) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{-2\pi}+1}{K^{-2\pi}-1} \right)$$

$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{2\pi}+1}{K^{2\pi}-1} \right)$ e però di nuovo nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione ſarà

$$\int \frac{dz}{1-z} \operatorname{ſen.} \left(l. \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{2\pi}+1}{K^{2\pi}-1} \right) - \frac{1}{2}$$

quantità eſponenziali reali, il che ſomminiſtra un altro Teorema degno di conſiderazione

§. XIII.

Con un ſimile metodo ſommeremo pure la ſerie avente per termine generale $\frac{1}{x^2-1}$. Imperciocchè eſſendo

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{ecc.}$, e laſciando ſuſſiſtere

$Z = l. \frac{1}{z}$, ſarà

$$\int \frac{dz}{1-z} \left(Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} + \text{ecc.} \right) = S. \frac{1}{x^2-1}$$

Ma, preſa K per baſe de' logaritmi iperbolici,

$$K^Z - 1 = Z + \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

$$1 - K^{-Z} = Z - \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} - \frac{Z^4}{1.2....4} + \text{ecc.}$$

e però ſommando

$\frac{K^Z - K^{-Z}}{2} = Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} + \text{ecc.}$ cioè paſſando agli archi immaginarj, ſarà la medeſima ſerie

$$Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.} = \omega \operatorname{ſen.} Z : \omega$$

e però nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\omega\int\frac{dz}{1-z}\,\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = S.\frac{1}{x^2-1}$$

E poichè in questo caso il valore della serie secondo il Sig. *Eulero* è $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\,\text{tang.}\,\pi}$; sarà integrando da $z=0$ sino a $z=1$

$$\omega\int\frac{dz}{1-z}\,\text{sen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\,\text{tang.}\,\pi}$$

nuovo Teorema da non trascurarsi.

§. XIV.

Ma generalmente

$$\frac{1}{x^m\pm 1}=\frac{1}{x^m}\mp\frac{1}{x^{2m}}+\frac{1}{x^{3m}}\mp\frac{1}{x^{4m}}+\text{ecc.}$$

ed è pel nostro metodo (Mem. della *Soc. Italiana* pag. 304)

$$\frac{1}{1.2....(m-1)}\int\frac{dz}{1-z}Z^{m-1}=S.\frac{1}{x^m}$$

$$\frac{1}{1.2....(2m-1)}\int\frac{dz}{1-z}Z^{2m-1}=S.\frac{1}{x^{2m}}\,\text{ecc.}$$ Dunque

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z^{m-1}}{1.2....(m-1)}\mp\frac{Z^{2m-1}}{1.2....(2m-1)}+\frac{Z^{3m-1}}{1.2...(3m-1)}\mp\text{ecc.}\right)$$

$=S.\frac{1}{x^m\pm 1}$. Con che abbiamo l' espressione generalissima di queste serie ridotta alle serie conosciute a fattori crescenti.

§. XV.

Passiamo ora al metodo diretto e semplicissimo di sommare sì fatte serie con tutta la possibile generalità, e prendiamo per gradi la serie di *Leibnitz*

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+$ ecc. all' infinito

Si trovi il termine di lei generale, il quale sarà manifesta-

mente $\frac{1}{2x+x^2}$. Ma $\frac{1}{2x+x^2}=\frac{1}{x(2+x)}$. Dunque è ella una ſerie algebraica reciproca di ſecondo ordine, che ha per fattori x, $2+x$. Poſto ciò ricorriamo alle formule generali della noſtra Memoria, e ſi tragga dall'eſpreſſione della Prop. XI. pag. 294 i due ultimi integrali, cioè

$$\frac{A}{nq}\int \overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int \overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)}}$$, e poichè

$A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=2$, queſt' eſpreſſione diverrà

$$\int \overline{zdz\int \overline{dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)}}=\frac{z^2}{2}\int dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)-\frac{1}{2}\int z^2dz\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)$$

e fatto $z=1$ fuori del primo ſegno, avremo, riducendo, integrando, e facendo $z=1$, la formula $\frac{3}{4}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+2)}$, che ſarà la ſomma generale della ſerie; e poſto $x=\infty$ reſterà $\frac{3}{4}$ per la ſomma all' infinito, come quel gran Geometra ha trovato. Di poi pigliamo a maneggiare un termine generale di queſta forma $\frac{1}{ax^2+b}$ qualunque coſa ſiaſi a, e b. Toſto veggiamo, che $\frac{1}{ax^2+b}$ $=\frac{1}{(-\sqrt{-b}+x\sqrt{a})(+\sqrt{-b}+x\sqrt{a})}$. Dunque ripigliando lo ſteſſo integrale precedente, e ponendo $x=\infty$, onde cercar toſto la ſomma all'infinito, diverrà $\frac{1-z^n}{1\mp z}$ $=\frac{1}{1\mp z}$, e però dividendolo in due, e riducendolo, prenderà eſſo queſta forma

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1\mp z}$$

valendo il ſegno ſuperiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

e l' inferiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\text{ecc.}$$

Ora eſſendo nel caſo noſtro $m=-\sqrt{-b}$, $p=\sqrt{-b}$, $n=q=\sqrt{a}$, ſe ſi faccia $\sqrt{-\frac{b}{a}}=c$ per ſemplicità, avremo

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1\mp z}=\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1\mp z}-\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}dz}{1\mp z}\ \ldots\ldots(A)$$

Ma $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\text{ecc.}$

$$\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\frac{z^{-c+1}}{1-c}+\frac{z^{-c+2}}{2-c}+\frac{z^{-c+3}}{3-c}+\text{ecc.}$$

Dunque nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac}$$

e però anche

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}\,dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}+\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac}\text{ ; quindi}$$

$$\text{l' integrale }(A)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\\-\frac{1}{1+c}-\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\end{array}\right\}$$

E poichè l' aggregato di queſte due ſerie è lo ſteſſo che $\frac{1}{2ac}\left(\frac{1}{c}-\frac{\pi}{\text{tang. }c\pi}\right)$ (Com. nuovi dell' Accad. di Pietrob. Vol. XIX

XIX. pag. 30) posto $n=1$ nell' espressione Euleriana sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b:a}}\right)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

Se dunque sia b quantità positiva, essendo a negativa, sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{b:a}}\right)=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-4a}+\frac{1}{b-9a}+\text{ecc.}$$

il qual valore sarà pure quello della serie

$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{4a-b}+\frac{1}{9a-b}+\text{ecc.}$, cioè essendo b negativa, e a positiva. E se fosse b positiva, e a negativa, sì che il valore della serie fosse espresso per funzione d' arco immaginario, potremo sempre avere la medesima serie espressa per esponenziali reali come segue

$-\frac{1}{2b}-\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{K^{-\pi h}+K^{\pi h}}{K^{-\pi h}-K^{\pi h}}$ posto $h=\sqrt{\frac{b}{a}}$, e K il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità.

Che se fosse c quantità razionale intera o rotta, si potrà sempre avere il valore dell' espressione (A) nel caso di $z=1$ particolarmente o algebraico, o trascendente con facilità. Sia per esempio $a=4$, $b=-9$, sarà $c=\sqrt{-\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}$, e però la formula diverrà $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^3)dz}{1-z}=\frac{11}{6.12}$ nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^3)\,dz}{1+z}=\frac{1}{6}l.\,2-\frac{5}{6.12}$; sì che sarà

$$\frac{11}{6.12}=\frac{1}{-5}+\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}+\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

$$\frac{1}{6}l.\,2-\frac{5}{6.12}=\frac{1}{-5}-\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}-\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

Similmente ſommeremo la ſerie

$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\frac{1}{16a+b}+$ ecc. per cui il noſtro metodo ci dà la formula $(B)\ \frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$ da integrarſi da $z=0$ ſino a $z=1$. Operando come qui innanzi troveremo

$$(B)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-c}-\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\\ -\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\end{array}\right\}$$

$=\left(\frac{\pi}{\text{ſen.}\,c\pi}-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2ac}$ (Com. nuovi di St. Pietrob. ivi) poſto $n=1$, ſu cui potremo inſtituire le medeſime operazioni del caſo precedente.

Ma ſenza ricorrere alla convenienza del noſtro integrale ſviluppato con le ſerie di *Eulero* citate qui ſopra, poſſiamo direttamente dimoſtrare il valore di lui. Imperciocchè è certo pe' principj del Calcolo Integrale (Com. nuovi di St. Pietrob. Vol. XIX. pag. 32.) che

$$(M)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{ſen.}\,c\pi}$$

$$(N)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}=\frac{\pi}{\text{tang.}\,c\pi}$$

Si ſottragga pertanto dall' integrale (M) l' integrale noſtro (A) per le ſerie alternative, e ſi avrà

$$\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}-\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}=\int\frac{(z^{c-1}+z^{c})dz}{1+z}$$

$=\int z^{c-1}dz=\frac{z^{c}}{c}=\frac{1}{c}$ poſto $z=1$. Dunque $\frac{\pi}{\text{ſen.}\,c\pi}$ $-\frac{1}{c}=\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$. Steſſamente ſommando l' integrale (N) col noſtro per le ſerie poſitive, avremo

$$\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}+\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}=\int\frac{(z^{c-1}-z^{c})dz}{1-z}$$

$= \int z^{c-1}dz = \frac{z^c}{c} = \frac{1}{c}$ posto $z=1$; e però $\frac{1}{c}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,c\pi}$

$= \int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}$, come abbiamo per l' uno e per l' altro stabilito precedentemente.

§. XVI.

E passando alle terze potenze affette, sia la serie (*C*)

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{8a+b}+\frac{1}{27a+b}-\frac{1}{64a+b}+\text{ecc.}\ldots\frac{1}{ax^3+b}\ldots(C)$$

Se facciasi $\frac{b}{a}=f^3$, il termine generale diventa $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^3+f^3}$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(x+f)\left(x+\frac{1}{2}(f+f\sqrt{-3})\right)\left(x+\frac{1}{2}(f-f\sqrt{-3})\right)}$$

Dunque scorgesi immediatamente, che la somma della serie (*C*) si riduce a integrare da $z=0$ fino a $z=1$ la formula del Probl. XI. pag. 293 del I. Vol. della *Società Italiana*, allorchè sieno i tre fattori al denominatore della forma qui proposta. Il che non involgendo, che un puro affare di calcolo secondo i valori di a, e b, non mi vi trattengo di più.

Quindi possiamo agevolmente conchiudere, che qualunque sia il grado n della potenza affetta, come nella serie generale

$$\frac{1}{a+b}\pm\frac{1}{a2^n+b}+\frac{1}{a3^n+b}\pm\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{1}{ax^n+b}$$

l' arcano di questa serie sta unicamente nel risolvere in fattori semplici il denominatore, che può sempre farsi, e ricorrere al metodo nostro generale di sommare le serie algebraiche reciproche nel luogo citato qui innanzi.

In questa guisa, ottenuto il valore della serie, avremo quello pure dell' espressione singolare

$$\int \frac{dz}{z}\left(\frac{(-l.z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} \mp \frac{(-l.z)^{2n-1}}{1.2...(2n-1)} + \frac{(-l.z)^{3n-1}}{1.2...(3n-1)} \mp \text{ecc.}\right)$$

da $z=0$ fino a $z=1$ trovata al §. XIII.

§. XVII.

E dando all' argomento tutta l'estensione, di cui è suscettibile, si vede, che le serie frazionali aventi al denominatore numeri figurati accresciuti o scemati d' altro numero figurato recate dall' illustre *Bernoulli*, non sono che casi particolarissimi del metodo, che abbiamo qui indicato. Imperciocchè sia per esempio

$$\frac{1}{8+10} \pm \frac{1}{69+66} + \frac{1}{224+196} \pm \frac{1}{515+430} + \text{ecc.}$$

In questa serie non sono altrimenti i numeri del denominatore potenze affette, ma sì bene numeri di una serie algebraica del terz' ordine affetta da un' altra dello stesso ordine. Di fatti i numeri 8, 69, 224, 515 ecc. appartengono alla serie, che ha per termine generale $7x^3 - 3x + 5x^2 - 1$, e il termine generale de' numeri 10, 66, 196 ecc. è $5x^3 + 7x^2 - 2$. Il metodo pertanto si riduce a sommare i due termini, con che si avrà il termine

$(A)\ldots\; 12x^3 + 12x^2 - 3x - 3$; e risoluto questo ne' fattori $2x-1$, $2x+1$, $3x+3$, non si tratta che di sommare la serie $\frac{1}{(-1+3x)(1+2x)(3+3x)}$, che potrà sempre farsi col metodo nostro o algebraicamente, o per funzioni d'archi circolari, o per logaritmi. Di che avendo dato qui sopra esempli bastevoli non occorre parlarne più diffusamente.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO

DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Real Presidio di Torino.

CONTINUAZIONE

*Del primo Trattato * sulle ossa del Cranio degli Uccelli in generale, e particolarmente delle Oche, e delle Anitre.*

PARTE SECONDA.

Pareti interne della cavità del Cranio.

CAPITOLO PRIMO.

Divisione generale.

IL celebratissimo *Alberto Allero* nella sua per ogni titolo grande opera sulla fabbrica, e l'uso delle parti del corpo umano ha giustamente notato, che la cavità del cranio degli uccelli è capace di modo, che il cerebro si trova in proporzione non solamente uguale a quella, che tiene per entro al cranio dell' uomo, nei grandi uccelli, ma eziandio maggiore nei più piccioli. Avea pure indicato questa cavità essere insignemente alta, e rotonda.

Non contenti noi di queste notizie, insufficienti per ajutar-

* Mem. della *Soc. Italiana* Tomo I. pag. 747

ci a dar un' esatta, e chiara sposizione dell'encefalo, divideremo la cavità del cranio degli uccelli

1. In *volta*, o parte superiore concava; in *pavimento*, o parte inferiore disuguale; in *pareti* anteriore, posteriore, e laterali, tutte suddivisibili in destra, e sinistra.

2. Noteremo inoltre, che tale cavità, considerata come dicesi all' ingrosso, è molto angusta al davanti, si allarga per ogni dimensione verso la metà alzandosene la *volta*, e deprimendosene il *pavimento* mentre che se ne scostano le *pareti*, che dove il pavimento si rialza per terminarsi al *gran foro occipitale*, queste *pareti* se ne accostano per restrignerla; che ivi però il diametro verticale se ne mantiene assai lungo perchè la *volta* sembra che se ne elevi.

3. Vi si distinguono molte *fosse* circonscritte da varie *eminenze*, e vi si osservano molti *fori*, delle quali cose tutte verremo qui recando l' opportuna descrizione.

CAPITOLO II.

Fosse della cavità del cranio degli uccelli.

Vediamo diciotto fosse in questa cavità, dodeci principali e sei minori. Le principali sono

Due *Olfattorie*,
Due *Maggiori*,
Due *Superiori di mezzo*,
La *Loggia del cervelletto*,
Due *Fosse laterali di mezzo*,
Due *Fosse dei Talami*, e
Del *Catino*

Le Fosse minori sono

L' Ottica, *La Pituitaria*,
Due *Sfondate*, *Due ovali*.

ARTICOLO I.

Fosse principali.

1. Incominceremo a descrivere le *fosse olfattorie* così dette perchè contengono, e danno uscita dal cranio ai *nervi olfattorj*. Situate nella estremità anteriore quasi acuta della cavità del cranio degli uccelli, queste fosse sono strette, coniche, aperte anteriormente come un imbuto a due cannelle; appoggiate sui lati superiori del pariete ossoso delle orbite, leggiermente divise in alto, e nella parte loro posteriore più ampla, mediante un picciolo risalto ossoso perpendicolare, cui è aderente la Dura-madre proprio dove se ne biforca in avanti il *Seno longitudinale*. Questo risalto conserva puranco negli uccelli il nome di *spina frontale* interna.

2. Non divide le due fosse olfattorie per tutta l' estension loro, poichè la parte anteriore della *volta* comune, per uno spazio maggiore di tre linee, non ha nelle oche, e nelle anitre verun risalto.

3. Oltre al passaggio, che danno ai N. *olfattorj* contengono le estremità anteriori pur coniche (alla foggia della parte più acuta de' lobi dell' aglio) degli emisferi del cervello, e lasciano aperto il varco al sangue, che scorre per la biforcazione accennata del *Seno longitudinale della D. M.* mediante due brevi canaletti, cui (ad imitazione del Santorini *) do il nome di *Emissarj* perchè si scarica per essi ** del sangue onde i seni suoi sono ripieni, e di *emissarj nasali* per il sito dove metton foce.

4. Le fosse olfattorie finiscono verso il naso in due canali distinti, separati mediante un tramezzo perpendicolare, che unisce la *volta* al *pavimento*: indietro, e in basso poi terminano al margine anteriore della *Fossa ottica*.

5. Le *Fosse maggiori*, che meritano tal nome per la loro

---

* Jo. Dom. Santorini Observationum Anatomicarum cap. *III*.

** Vedremo a suo luogo la D. M. degli uccelli, e più palesemente quella delle oche avere cinque para di *Emissarj*, cioè gli *Emissarj Nasali*, i *Pituitari*, i *Laterali esterni*, i *Laterali posteriori*, e gli *occipitali*.

ampiezza , e capacità, sono scolpite nella faccia interna della volta , nella anteriore delle pareti, e del pavimento , anteriormente, e lateralmente alle due *fosse superiori di mezzo*, dalle quali le separa un risalto ossoso , curvo , ed obbliquo.

6. Le *Fosse superiori di mezzo* si vedono nel centro della volta del cranio , separate soltanto la destra dalla sinistra mediante la *spina longitudinale* , che stendesi per il tratto di 14 linee dal centro della volta delle fosse olfattorie (1) al margine superiore dell' *Arco*, ond'è circoscritta al davanti la *Loggia del cervelletto*.

7. La spina longitudinale, che pur ora mentovammo, è solcata per dar luogo al *seno longitudinale* della *D. M.*; e questo *solco* , di mediocre ampiezza in avanti , si restrigne alquanto nel centro della porzione frontale * per allargarsi di nuovo a misura, che si accosta all' Arco, (*6*) dove ha circa una linea d' ampiezza ; e qui sbocca nel *seno Long.* un grosso tronco venoso , che passa per un *foro* già stato descritto ** , e che ha le sue radici nelle sostanze molli , che vestono il cranio.

8. Immediatamente dietro a quel foro il solco si biforca, e le due porzioni risultanti da tale biforcazione si circonflettono in basso simmetricamente , per quel che spetta al corso ; ma la porzion destra per l' ordinario si trova più larga. Ricevono i *Seni laterali della D. M.* , continuazioni, o sia biforcamenti del *seno longitudinale* (1).

9. Nè tutta la parte anteriore della spina longitudinale interna è solcata (1 , 2), perciocchè la porzion della medesima, che pur esiste nella volta della porzion posteriore delle fosse olfattorie (1 , 2) , non è nemmeno accompagnata dal seno longitudinale ; che anzi prima che la spina ivi si cancelli, la colonna del sangue la quale qui si trova nel seno , dividendosi questo, prende una direzione obbliqua verso le produzioni della D. M. onde i N. olfattorj sono inguainati come in due cannelle (1) , e viene con esse divergendo per i *fori olfattorj* guidata fuori del cranio nelle orbite.

10. La

* Parte I. Cap. II. §. 4.
** Parte I. cap. II. §§. 2 , 3 .

10. La settima fossa nominata *Loggia del cervelletto* perchè i lati dell' arco (6), e quelli del *gran foro occipitale* ne formano i pilastri, e ne sostengono molto elegantemente la profonda volta, è situata nella sommità posteriore della cavità del cranio, separata dalle fosse superiori di mezzo (6) mediante l' arco suddetto, munito d' un bell' orlo angolare quasi tagliente, simile ad una mezza luna con le corna rivolte al basso.

11. Lo sfondo della Loggia è considerabile in tutti gli uccelli, e meglio che in nessun altro nelle oche vi si veggono scolpiti due *solchi* irregolarmente serpeggianti, destinati a dar ricetto al sangue, che riempie due *seni Subalterni* * comunicanti con il principio dei *seni Laterali* (8) *della Dura-madre*.

12. Tutta la Loggia del cervelletto delle oche è capace della punta del mignolo, essendo pur tale ordinariamente la grossezza di questa importante porzione del cerebro nelle medesime.

13. La ottava, e la nona si dicono *fosse Laterali di mezzo* per il luogo, che occupano in questi cranj, essendo scolpite ai fianchi del pavimento assai più in basso, che non sono le olfattorie, dalle quali vengono separate mediante un *risalto* obbliquo traversale, che si curva allo insù contro le pareti del cranio. La loro profondità è maggiore al davanti, e sulla faccia interna, corrispondente delle apofisi orbitarie posteriori **, sono volte più allo in suori e contengono il lembo esterno della faccia inferiore degli emisferi del cervello.

14. Nomino *fosse dei Talami* quelle due, che occupano i lati del pavimento del cranio, divise dalle laterali di mezzo (13) per una *cresta ossosa semilunare* assai tagliente quasi orizzontale: dal centro del pavimento del cranio queste due creste si portano in dietro verso il margine anteriore delle picciole *fosse auditorie*.

15. La profondità delle fosse de' talami viene accresciuta

Hh

* Nel Trattato delle Meningi dove si favella della D. M. vedremo questi *Seni Subalterni* sboccare in due ricettacoli venosi posti, ai fianchi dell' articolazione dell' apofise occipitale con la prima vertebra.

** Loc. citato Artic. II. §. 6.

da due pieghe falcate della D. M., le quali attaccandosi alla menzionata cresta, ne fregiano tutto il tagliente seguendone la concavità. Contengono gran parte dei *Talami de' N. Ottici*.

16. L' ultima fossa delle maggiori situata nella parte posteriore del pavimento, avendo nelle oche, e nelle anitre la figura d' un *catino* quasi ovale, ne riceve anche il nome. E' assai più estesa in dietro che le precedenti, e contiene la *midolla allungata*, la quale sul margine posterior di questa fossa dolcemente si eleva per giugnere al *gran foro occipitale*, dove questo margine ha nelle oche una breve *cresta* molto elevata. Negli uccelli di rapina e fra gli altri nel Nibbio, nel Falchetto, nello Sparviere, e nella Crivella tal *cresta* si stende per tutta la lunghezza del catino dividendone la parte destra dalla sinistra.

ARTICOLO II.

Delle Fosse Minori.

1. La prima a scoprirsi nel cranio degli uccelli è l'*Ottica* situata immediatamente dietro l' angolo, che s' incontra sul margine posteriore del pavimento delle fosse olfattorie * verso il centro; angolo che in molte specie d' uccelli ivi fa un notabilissimo risalto traversale, tanto per lo suo inoltramento allo indietro, quanto per la profondità, e l' ampiezza dello sfondo, che viene dall' accennato risalto limitato in avanti, e in parte nascosto ** : posteriormente confina con il margine anteriore della fossa *Pituitaria*.

2. La fossa ottica è unica nella cavità del cranio, ma tosto degenera in due ampli fori perchè incontra il lembo superior posteriore del tramezzo delle orbite ***, il quale la divide perpendicolarmente in due mezze lune uguali una destra, e l' altra sinistra; ed avendo lo stesso tramezzo la porzione di quel margine, che divide la fossa ottica, lunata, ciò dà

---

* Artic. preced. §. 4.

** Questa cosa è più ch' altrove apparente nei Papagalli.

*** Parte I. cap. II. art. II. §. 9.

alla fossa medesima profondità maggiore, e maggiore ampiezza ai due fori obbliqui detti *fori ottici*, perchè danno passaggio al grosso tronco dei N. ottici.

3. Alquanto più indietro, ed anche nel mezzo del pavimento vediamo la *fossa Pituitaria*, l' entrata della quale è quasi romboidea. E' separata dall' ottica mediante un risalto ossoso traversale molto sottile, e fragile.

4. E' pure doppia verso le orbite, donde permette, che s' introducano nel cranio due notabili tronchi arteriosi * per due fori assai larghi, che sboccano nel di lei fondo.

5. E' molto estesa in basso; molto pure obbliquamente indietro sotto il pavimento sul margine del tramezzo delle orbite, le lamine del quale sembra che ivi si discostino per dar ricetto alla porzion principale più bassa e nascosta della *glandula pituitaria*.

6. Sui fianchi di questa fossa troviamo pure le bocche di quelli due canaletti nei quali s' insinuano, e trascorrono i *nervi motori comuni degli occhi*: la loro apertura esteriore vedesi nelle orbite una linea circa più addietro, e verso le tempie, della uscita dei *N. ottici*.

7. Nei lati della fossa Pituitaria mettono foce i due *condotti delle Carotidi* cioè quei due canaletti ossosi, per la bocca inferiore dei quali, aperta ai fianchi della tuberosità basilare **, si cacciano, e portandosi verso la base del cervello i due grossi tronchi di tali arterie passano dietro alla glandula pituitaria per giugnere a diramarsi nella suddetta viscera.

8. Questi due condotti, più larghi alla base del cranio fuori del medesimo, si restringono a misura che circonflettendosi ne percorrono obbliquamente la spugnosa spessezza del pavimento, sicchè prendono la figura di due corna convergenti in alto e allo innanzi, cioè con le punte ridotte in una sola nella fossa pituitaria, mentre che le curvità più grandi ne sono in fuori, e le basi, come abbiamo detto, indietro e in basso.

9. La terza e la quarta delle fosse minori sono simmetri-

* Questi sono differenti dal tronco principale delle carotidi, che accenneremo fra breve.

** Loc. citat. §. 12. artic. IV. §. 4.

che, ed io le nomino *sfondate* perchè in vece di fondo si aprono alla base del cranio con un' ampla bocca onde escono i grossi tronchi de' *N. mascellari superiori ed inferiori*.

10. Le fosse sfondate occupano i lati del pavimento al di dietro della pituitaria (5) tra le fosse dei talami * (3, 4 ecc.) il catino **, e le *fosse auditorie*, che quanto prima descriveremo. Danno ricetto ai tronchi de' N. suddetti, i quali affatto le riempiono mediante il grosso *ganglio*, che questi nervi fanno qui dopo essersene allontanato il *N. oftalmico*. Danno pure uscita ad una radice considerabile delle *vene jugulari*.

11. Non è raro trovare il margine posteriore delle fosse sfondate assai profondamente incavato per dare ricetto al ganglio mentovato, incavature, che si potrebbono considerare come due fossette subalterne e ottenere il nome di *fossette dei Gangli*.

12. Negli encefali freschi, ancora tappezzati della D. M., le fosse sfondate sono in gran parte coperte d'una piega poco meno che perpendicolare fatta dalla stessa meninge, e così esattamente riempiute da quei nervi, e dal ganglio, che riesce difficile conoscerne a dovere l' estensione e la capacità salvo nelle ossa secche, e ben ripulite sì al di fuori, che al di dentro.

13. Le *fosse ovali* sono dette così dalla loro figura, e si trovano alquanto più addietro delle sfondate, e più alto sulle pareti laterali della parte posteriore della cavità del cranio: hanno molta profondità; l' orlo ne è molto rilevato, e convesso, e n' è quasi verticale il diametro maggiore.

14. Si distinguono agevolmente da tutte le altre per la figura, e per la solidità del risalto degli orli, fatto da uno dei *canali Semicircolari* destinati alla perfezione dell' udito, in tutti gli uccelli (e particolarmente nei più piccioli, e nei notturni) elegantissimi.

15. Le fa distinguere altresì la profondità loro, occupata da i nervi *acustici* avvolti in una grossa *appendice* dei lati del cervelletto, molle, e cinericcia all' esterno, che parte dai

---

* Artic. anteced. §. 14. 15.
** Ivi §. 16.

lati della base del cervelletto medesimo ; la quale appendice è contenuta in una borsa della D. M. tappezzante con esattezza amendue gli antri, tinta di colore piombino per il molto sangue venoso, che scorre ed empie varj seni osservabili tra le lamine di questa meninge.

16. Sboccano questi seni nelle fosse sfondate mediante un largo solco superficialmente scolpito nello spazio osloso, che queste dagli antri divide, e ch' è sede d' un paro di *emissarj* detti *Laterali esterni*, la direzione dei quali è obbliqua al davanti, e in basso.

CAPITOLO III.

Dei Fori osservabili nella cavità del cranio degli Uccelli.

Dovendosi ora numerare i fori, che si veggono per entro al cranio degli uccelli, prenderemo sempre a considerare quello delle anitre, e delle oche per esser cosa più facile a' principianti il tener dietro con l' occhio su queste ossa alla nostra descrizione. Terremo pure qui l' ordine, che viene prescritto dalla situazion de' fori stessi cominciando dagli anteriori verso il ceppo del becco, e terminando con quei dell' occipite, proccurando di dare ad ognuno d' essi tal nome, che indichi se vaso, o nervo vi passi, e talvolta quale ne sia la capacità, la figura, e la direzione.

Sono avvezzo ad osservarvene i seguenti

Due *Olfattorj*.
Due *Arteriali anteriori*.
Due *Ottici*.
Due *Motori comuni*.
Due *Patetici*.
Due *Venosi della fossa pituitaria*.
Due *Carotidei*.
Due *Oftalmici*.
Due *Motori esterni*.
Due *Mascellari superiori*.
Due *Mascellari inferiori*.
Due *Auditorj*.

Due *Piccioli Simpatici*.
Due *Vaghi*, o *Laceri*.
Due *Jugulari*.
Due *Palatini*.
Due *Ipoglossi*, ed
Il *gran foro occipitale*.

ARTICOLO I.

Dei Fori Olfattorj.

I primi a scoprirsi nella parte anteriore del cranio d' ogni uccello sono i due *fori Olfattorj* separati mediante la parte superiore del tramezzo delle orbite, * sulle faccie laterali del quale si prolungano in una doccia di linee tre, che finisce nell' ampia fossa nasale occupata in amendue i lati dalla conca superiore delle narici.

Per questo paro di fori unitamente ai *N. Olfattorj* esce dal cranio il primo paro degli emissarj della dura madre. **

ARTICOLO II.

Dei Fori arteriali.

§. 1. Il secondo paro dà passaggio ad una coppia di ramicelli arteriosi, che va indietro obbliquamente divergendo per diramarsi nel centro della faccia inferiore degli emisferi del cervello. Vedesi quasi mezzo pollice discosto dal foro olfattorio.

2. Le aperture interne dei *F.* arteriali son nascose in una profonda, e stretta scanalatura traversale, alquanto curva nel mezzo della sua lunghezza, che ha le estremità molto divergenti: è scolpita sopra una specie di cresta, e si continua in un solco pure obbliquo.

3. Le aperture esteriori sono nelle orbite quattro linee

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 9.
** Cap. II. Art. I. §. 3. della Parte seconda.

posteriormente all'orlo diretano dei *F.* olfattorj, e due linee anteriormente agli ottici, nel margine superiore del tramezzo delle orbite. *

ARTICOLO III.

Dei Fori ottici.

Questo paro è separato da quello dei precedenti fori, che vi sta sopra, mediante una forte, e spessa cresta ossosa traversale. Già si conosce la fossa dalla quale i fori ottici procedono, ** e si sa che il fondo anteriore ne è diviso dalla parte corrispondente del tramezzo delle orbite, le faccie destra e sinistra del quale tramezzo ne sostengono le obblique aperture esteriori, per le quali sboccan nelle orbite i *N.* ottici.

ARTICOLO IV.

Fori dei N. motori comuni degli occhi.

1. Una linea ┼ 1 : 2 circa posteriormente, e sui lati della fossa ottica *** si vedono i bislunghi fori, che danno uscita ai *N. motori comuni degli occhi*, dai quali prendono il nome. La distanza del destro dal sinistro è lin. 3. circa, e sono ai fianchi della fossa pituitaria, **** dai margini della quale sono separati per una tenue *laminetta ossosa* alquanto più in alto sulle pareti del cranio, che fanno le spalle della fossa medesima, corrispondentemente all' *istmo* largo più d' una linea che divide la pituitaria dalla ottica.

2. Sono pure separati da tale istmo per una larga e sottile ossosa *Lastra*; e la distanza loro dai fori oftalmici posti più indietro è di tre quarti di linea, tale essendo la larghezza dell' *ossosa Lisca* che ne divide il margine diretano dall' orlo anteriore dei *fori patetici* loro paralleli, ma più prossimi alla fossa pituitaria.

---

* Par. I. Cap. II. art. II. §. 9.
** Vedi Cap. preced. art. II. §. 2.
*** Ivi.
**** Par. II. Cap. II. Art. II. §. 3.

3. Meritano d'essere notati in questo sito i *Solchi* lunghi più di una linea per li quali scorrono i *N.* motori comuni prima di arrivare all'apertura interna dei *canali* ai tronchi loro destinati, che guidano verso le orbite, dove penetrano per un *foro bislungo* quasi nascosto dalla radice di quelle brevi *spine ossose*, che stanno sul fianco esterno dei *fori carotidei* a livello della radice delle apofisi orbitarie posteriori. *

ARTICOLO V.

De' Fori Patetici.

Si trovano proprio nella fossa pituitaria sotto quella ossosa laminetta, che fa l' interno margine degli ora descritti solchi, e canali, alquanto più sulla parte anteriore dei parieti della suddetta fossa, e sul fianco esterno dei *fori carotidei*. Si aprono il varco obbliquamente nelle orbite fra la apertura della coppia precedente, e quella dei *fori carotidei* medesimi.

ARTICOLO VI.

Fori venosi della fossa Pituitaria.

Alla parte anteriore del fondo della fossa pituitaria si veggono due aperture ovali poco meno larghe d' una linea, per le quali escono del cranio due *emissarj* della *D. M.* simili a due grosse vene: diedi loro perciò il nome di fori venosi della fossa pituitaria.

ARTICOLO VII.

Fori Carotidei.

1. Alla parte posteriore della medesima fossa, dove si va restringendo, ed abbassandosi nella sostanza cavernosa della tuberosità

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 6.

berosità basilare * vi è la foce dei due ampli canali ossosi circonflessi, la bocca dei quali è già stata da noi mentovata qui sopra, ** ne' fianchi della *colonna ossosa* tra le faccette articolari, e la porzione più bassa della radice delle apofisi mastoidee. Sono i fori carotidei interni, irregolarmente ovali, e larghi poco meno d'una linea. Per questi canali o condotti nei cranj delle oche, delle anitre, delle galline, e della maggior parte degli uccelli scorrono i tronchi delle arterie carotidi, le quali uniformemente a quello, che si osserva nell' encefalo umano, vengono a sboccare nei lati della fossa pituitaria per diramarsi nella sostanza del cervello.

2. Danno pur anco passaggio al paro dei nervi *Intercostali, o grandi Simpatici*.

ARTICOLO VIII.

Fori Oftalmici

1. Situati sul margine inferiore delle fosse dei *talami* ***, questi fori vengono così detti perchè vi passa il tronco di quei nervi, che vedremo (assai più manifestamente ancora, che negli uomini) avere negli uccelli origine distinta da quella dei *N.* mascellari superiore, ed inferiore.

2. Nei cranj mondi si scorge il largo e profondo *solco*, sul quale scorre il *N.* ostalmico mentre che, sciioltosi dal *ganglio* **** comune ai due mascellari ora accennati, si porta obbliquamente addentro per imboccare il proprio foro, che è ritondo, assai largo, e distante quello del lato destro più di lin. 3. dal sinistro, di maniera che forma l' angolo esterno d' un triangolo immaginabile tra questo, la fossa pituitaria, e il foro del *N.* motor esterno degli occhi.

3. L' uscita del *N.* oftalmatico nelle orbite si trova fra

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 12.
** E alla Par. I. Cap. II. Art. IV., e §. 4.
*** Par. II. Cap. II. Art. I. §. §. 14., e 15.
**** Cap. antecedente, Art. II. §. §. 10., 11., 12.

quella del patetico, quella del motor comune, e la fascia interna della spina. *

4. Vi è pure una tenue lamina ossosa, che serve di volta al canale del *N.* oftalmico, e di fondo al solco del *motor comune degli occhi*.

Articolo IX.

Fori Motori esterni.

Questi fanno la nona coppia, e sono lin. 3 + 1 : 4 posteriormente alla fossa pituitaria, lontani due linee il destro dal sinistro, e lin. 1 + 1 : 2 dal margine delle fosse sfondate: ** vi passano i *N. motori esterni degli occhi* dopo aver fatto un lungo tragitto a traverso della spessezza della base del cranio, al di sotto della fossa pituitaria, in un canale che sbocca nella parte posteriore delle orbite; e qui amendue i nervi si diramano nei muscoli destinati al globo degli occhi, e nelle tuniche dei globi stessi dal canto delle orecchie.

Articolo X.

Fori mascellari superiori, ed inferiori.

1. La decima, e l'undecima coppia de' fori sono nelle fosse sfondate; e siccome servono amendue a dar passaggio ad un ramo distinto del *N.* mascellar superiore, così le comprendiamo in un solo articolo, sebbene il primo più angusto, occupato tutto dal ramo del suddetto, ne ritenga il nome, ed al secondo, perchè dà passaggio al tronco del *N. mascellar inferiore* unitamente ad un'altra branca del mascellar superiore, io dia il nome di mascellar inferiore.

2. Il *foro mascellar superiore* adunque si trova alquanto più innanzi e verso l' asse del pavimento della cavità del cranio. Dà passaggio ad un grosso ramo del *N.* mascellar superiore,

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 16.

** Par. II. Cap. II. Art. II. §. 9., e 10.

delle diramazioni del quale favelleremo a lungo quando descriveremo la parte superiore del becco.

3. Il *mascellar inferiore* poi è assai più grande avendo due linee di diametro. Si trova alquanto più addietro del precedente. Si apre nella parte anterior esterna delle fosse sfondate per dar passaggio al tronco principale del *N.* mascellar superiore nel medesimo tempo, che ne esce pure il tronco del mascellar inferiore, giacch' è appunto in questo sito il ganglio *, onde negli uccelli sono insieme confusi questi due tronchi.

4. Quinci esce del pari il terzo paro degli *emissarj* ** della *D. M.* detti *emissarj laterali esterni*.

5. La distanza dei fori mascellari inferiori tra di loro è di sette linee.

6. Tra questi poi, e le fosse ovali *** si vede un *istmo* ossoso molto spesso largo tre linee.

ARTICOLO XI.

Fori Auditorj.

Nelle fosse ovali **** abbiamo indicato insinuarsi una porzion notabile di sostanza dependente dal cervelletto, nella quale dimostreremo a suo luogo essere avviluppato il vero nervo auditorio, cioè quello, che negli uomini suol essere conosciuto sotto il nome di porzion molle del nervo auditorio. Il fondo di questi antri è minutissimamente crivellato per dar passaggio a' rami proporzionati di tal nervo.

* Cap. precedente Art. II. §. 10., 11., e 12.
** Par. II. Cap. II. Art. II. §. 15.
*** Ivi §. 13.
**** Cap. precedente Art. II. §. 15.

ARTICOLO XII.

Fori piccioli ſimpatici.

1. Tra il margine anteriore delle foſſe ovali, il poſteriore delle sfondate, e l'orlo vicino dei *fori laceri* ſi vede una foſſicella ſuperficiale, anch' eſſa ovale. In queſta ſi contano diverſi forellini (talora cinque per parte, talora ſei, talora quattro, altre volte da un canto ve n' ha più che dall'altro incoſtantemente per quello, che riguarda il lato deſtro, o ſiniſtro) e per queſti forellini penetrano nel labirinto, deſtinato alla perſezione dell'udito negli uccelli, i fili dei nervi piccioli ſimpatici.

2. Non meritano nemmeno in queſti animali il nome di porzion dura dei *N.* auditorj, ripugnante alla deſtinazione loro, perciocchè ſebbene da queſti nervi la membrana bipartita del timpano, gli oſſetti, e le apofiſi bizzarre loro ne ſono provveduti negli uccelli di qualche filuzzo nervoſo, come la ſuddetta membrana, e i muſculi del martello e della ſtaffa nell' uomo e nei quadrupedi; tuttavia i rami principali vanno a diramarſi nelle parti molli eſteriori dei lati della teſta.

3. Queſta diſtribuzione oſſervaſi anche meglio ne' volatili più groſſi, come ſono le oche, le anitre, i barbagianni, le grù, gli aghironi, i galli d' india, gli ſparvieri, i nibbj, le galline, e può da ognuno vederſi anche nei minori purchè vi abbia l'occhio per vedere e la mano per notomizzare avvezzi; che altrimenti la ſottigliezza di tali diramazioni per entro ad un compleſſo di parti in apparenza aſſai confuſa, in ſoſtanza tenere, molli, e minute, può deludere l' acume d' un ornitotomiſta meno eſercitato.

ARTICOLO XIII.

Fori laceri.

1. Una linea poſteriormente alla foſſicella ſuperficiale ora deſcritta, ed una linea pure al di ſotto delle foſſe ovali, ſi trova la coppia dei fori equivalenti ai laceri, o ſtracciati

del cranio umano, destinata eziandio negli uccelli a dar passaggio ai tronchi del par vago.

2. Se potessi uniformarmi all' uso comune antico di numerare i nervi dell' encefalo, questo paro sarebbe anche qui l' ottavo; ma siccome debbo conformarmi alla natura, ed esporre con tutta la chiarezza possibile quello ch' io veramente ci vedo, e che da chiunque ha da vedersi, così nella quarta parte dell' Encefalotomia umana ho dimostrato i nervi nell' encefalo umano essere quindici para, per quello che risguarda i principali, e tre para d' accessorj; nè mi asterrò a suo tempo di far vedere come in quel degli uccelli se ne discoprono pure quattordici para, dei quali il par vago viene ad essere il decimo, senza gli accessorj a me finora ignoti.

3. La lunghezza di questi fori si accosta alle due linee, e la larghezza a poco meno di una, di modo che il picciolo nervo, che vi passa, non occupandone intieramente l' apertura, per essa sbocca dal cranio un grosso emissario della *D.* Madre, che si fa strada verso l' estremità diretana interna dei fori laceri, dopo d' aver fatto qualche tragitto sull' orlo posteriore delle fosse ovali.

ARTICOLO XIV.

Golfi delle Jugulari.

Nella spessezza delle ossa, che fanno il contorno dei fori laceri, si vede un incavo simile alla fossa scolpita nella rupe delle ossa temporali umane atta a dar ricetto ad un gozzo venoso non diverso dal golfo delle jugulari; e in questo mettono foce non solamente l' emissario poc' anzi mentovato, ma eziandio una grossa vena, che vi discende dalla cassa del timpano; danno insieme origine alle vene jugulari: e quantunque nella cavità del cranio i fori laceri abbiano una sola apertura piuttosto spaziosa, alla base del cranio però, cioè esteriormente, al di dietro delle apofisi mastoidee, * nella

* Par. I. Cap. II. Art. I. §. 9.

foſſa, che dà maggiore riſalto a tali apofiſi *, il foro è ſempre doppio, e per il medeſimo, come nei cranj umani, il nervo paſſa per l'apertura anteriore, e per la poſteriore sbocca nelle vene jugulari, per il golfo loro, il ſangue portato dal ſuddetto emiſſario, che tien negli uccelli il luogo dei ſeni laterali notiſſimi nell' uomo, e ne' quadrupedi. Queſti *emiſſarj* ſono i *laterali poſteriori*.

ARTICOLO XV.

Fori Palatini.

La coppia de' fori, che ſta immediatamente dietro ai vaghi, è deſtinata al paſſaggio di due tronchi nervoſi, che vanno a diramarſi nella membrana del palato. Il deſtro foro è lontano quaſi due linee dal ſiniſtro, e tre dal *gran foro occipitale*, ſui margini laterali del catino **, e ſono come il paro ſeguente paralleli all' aſſe longitudinale del catino medeſimo.

ARTICGLO XVI.

Fori Ipogloſſi.

I veri *nervi ipogloſſi*, che negli uccelli naſcono ſempre con due piatte radici per lato dai fianchi anteriori della *midolla allungata*, eſcono del cranio per una coppia di fori ſituati nel catino, mezza linea più addietro de' fori palatini. In molti individui però, anche nelle ſpecie diverſe, queſti fori, ch' io nomino *ipogloſſi*, ſi trovano a due per lato, ſimmetrici, e paralleli all' aſſe longitudinale del catino. In amendue i caſi i tronchi nervoſi, o unite, o diviſe avendo le piatte radici loro, attraverſano la ſpeſſezza della baſe del cranio, alquanto obbliquamente inclinando verſo l' incavatura maſtoidea ***,

---

* Ivi Art. III. §. 9.
** Cap. precedente Art. I. §. 16.
*** Par. I. Cap. II. Art. III. §. 9.

ed uſcendo dalla parte anteriore della medeſima traſorano le parti vicine per diramarſi nella ſoſtanza della lingua.

ARTICOLO XVII.

Gran foro Occipitale.

1. Finalmente vediamo il *gran foro occipitale* ſituato quaſi nel mezzo della poppa, o faccia poſteriore del cranio. A lin. 4 + 1 : 2 di diametro verticale, e lin. 4 + 2 : 3 di diametro traverſo. E' molto arcato all' orlo ſuperiore, ed al margine inferiore porta affiſſa eſteriormente la apofiſe occipitale *, coperta di liſcia cartilagine, cui mediante il capo ſi articola con la prima vertebra cervicale.

2. Queſto foro dà paſſaggio alla ſpinal midolla, e a due ampli emiſſarj, che formano il quinto paro, detti *emiſſarj occipitali:* contengono molto ſangue, che sbocca in due groſſe vene, coſteggianti nella diſceſa loro i lati delle vertebre del collo, ingroſſate da altri vaſi. **

3. A tali vene ſono paralleli due mediocri tronchi arterioſi, che aſcendono ſu per il collo verſo l'encefalo; s'introducono nella cavità del cranio per il gran foro occipitale, e ſono le arterie vertebrali deſtinate ad irrigare la ſoſtanza del cervello.

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 14.
** Vedi l' Art. XIII., e il XIV. precedenti.

DELLE OSSERVAZIONI

SOLSTIZIALI.

Fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782, e de' loro Risultati paragonandole colle simili Osservazioni del 1756, 1764, e 1775.

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toscana.

INTRODUZIONE.

LE osservazioni solstiziali fatte al vasto Gnomone della Cattedrale Fiorentina col paragone al Marmo solstiziale del 1510 sono state da me lungamente descritte nel mio Volume su questa materia. (*a*)

Le osservazioni del 1764 sono state da me racchiuse in un Opuscolo inedito, del quale somministrerò tutto ciò che concerne il presente argomento negli Articoli seguenti.

Le altre osservazioni del 1775 sono state stampate a Livorno l' anno 1776. (*b*)

Era da me atteso con impazienza il corrente anno 1782, nel quale, essendo il nodo ascendente lunare presso il principio dell' Ariete, mi somministrava il termine di un importante paragone con tutte le altre osservazioni dal 1756 fino al presente.

Poichè due sono gli elementi, che io mi son proposto a verificare con questo altissimo, ed immobilissimo Settore, il cui

(*a*) Veggasi il Tomo intitolato: *Del Vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino* ecc. stampato a Firenze l' anno 1757.

(*b*) Veggasi l' Opuscolo intitolato: *Dissertazione intorno alle osservazioni del 1775 allo Gnomone della Meridiana Fiorentina* ecc. Livorno 1776.

cui raggio ſupera piedi parigini 277. Il primo intorno al periodo ſecolare dell'obbliquità dell'ecclittica, nel quale la diſcordia degli Aſtronomi era tanto grande, quanto era grande l' importanza di queſta ricerca, dalla quale, come ciaſcun ſa, dipendono alcuni piccoliſſimi movimenti apparenti delle ſtelle fiſſe, della terra, e de' pianeti, i quali hanno tormentati gl' ingegni degli Aſtronomi moderni. Or queſto primo elemento è ſtato da me verificato talmente ne' due Volumi citati, che parte per l' eſattezza delle oſſervazioni, e parte per il loro conſentimento con altre ſomiglianti oſſervazioni antiche, e moderne, i più inſigni Aſtronomi a tal nuova mia opinione ſi ſono accoſtati (*c*) recedendo dal periodo di 88″, di 47″, e di 45″, e tenendoſi all' altro periodo aſſai più riſtretto di 34″. 42 centeſime, da me determinato colle oſſervazioni del 1756, e 1775.

Stabilito adunque queſto primo elemento, reſtava il ſecondo non meno importante del primo, ma di una indagine aſſai più malagevole, e queſto è il vero valore della nutazione dell' aſſe terreſtre, la quale va ſempre alterando le medie obbliquità dell'ecclittica, e non meno le poſizioni apparenti di tante migliaja di ſtelle fiſſe, i cui piccoliſſimi moti, tanto in latitudine, che in longitudine, ſono ſtati ſcoperti dalla moderna Aſtronomia, ed in particolare dal rinomato Ingleſe Aſtronomo il *Bradlejo*. Egli dal 1727 ſino al 1747 con grandiſſimo numero di oſſervazioni, che non potevano ſpiegarſi nè coll' annua parallaſſi, nè coll' aberrazione della luce, ritrovò, che detti fenomeni godevano di una ſemplice ſpiegazione, ſupponendo una nutazione dell' aſſe terreſtre, la quale ſi manifeſtava dipendente dal nodo aſcendente lunare, il quale quando trovavaſi al principio d' Ariete, la nutazione era maſſima boreale nelle ſtelle fiſſe, che erano proſſime al coluro de' ſolſtizj. E quando al contrario il detto nodo era paſſato al principio della Libra,

(*c*) Tra queſti uno è l'accuratiſſimo, e chiariſſimo M: de la *Lande* il quale nel Tomo IV. della ſua Aſtronomia ha fiſſato tal periodo ſecolare di 33″ $\frac{1}{3}$, pochiſſimo differente dal mio di 34″. 2 centeſime.

la nutazione cambiavasi in australe, ed in tal senso era pur massima.

Il valore di tal nutazione fu giudicato dal medesimo Astronomo di 18″, e così è stato seguitato da altri Astronomi. Io dalle osservazioni del 1764, paragonate con quelle del 1756, l' ho dedotto maggiore, e come tale l' espongo nel citato Opuscolo inedito. In esso mi mancavano le nuove osservazioni dell' anno corrente, le quali avendo fatte con particolar diligenza, mi son ritrovato nel grado di esaminare la stessa ricerca della nutazione, non già con una, ma bensì con quattro combinazioni.

La prima delle osservazioni del 1756 paragonate a quelle del 1764.

La seconda di queste colle osservazioni del 1775.

La terza del 1775 con quelle del corrente anno 1782.

E finalmente la quarta del 1756 con quelle dello stesso anno 1782.

In questi anni due volte il nodo ascendente lunare si è ritrovato prossimo al principio d' Ariete, cioè nel 1764, e 1782.

Due volte pure si è incontrato nelle vicinanze della Libra, come nel 1756, e 1775.

Nel primo periodo ci corrono anni 18, e nel secondo anni 19. Il vero periodo del nodo ascendente lunare è di anni 18.63 parti centesime. La frazione, che manca, o eccede ne' due periodi, è tale, che facilmente riducesi co' soliti metodi.

Per la qual cosa, essendo io in grado di provare il valore della nutazione con quattro combinazioni formate in detti due periodi, ho intrapresa questa fatica, essendo impazientissimo di verificare questo secondo elemento della nutazione dell' asse terrestre. Quale sia il risultato, si vedrà in questa breve Memoria, che è l' estratto di una assai lunga, che io differisco ad altro tempo, non potendo per ora renderla pubblica. Ma non ho voluto differire l' edizione del presente ristretto per la sua gravissima importanza nell' Astronomia.

Non posso dissimulare, che fino dal principio dell' opera più ostacoli mi ritardavano, e tacendo degli altri, un grave

ostacolo mi presentava l' elemento del lunar perigeo, che doveva certamente influire nella nutazione desiderata; ma non si sapeva, se il suo influsso fosse sensibile, o no, e di qual valore esso si fosse. Nacque il primo sospetto nello stesso *Bradlejo*, ma io non so, se egli, o altri Astronomi dopo di lui si siano applicati di proposito a calcolarlo. Or se in altre ricerche Astronomiche è necessario un tale articolo, nella presente mia ricerca egli è indispensabile. Trattasi qui d' indagare, se la nutazione sia di 18″, di 19″, ovvero di 20″, parendomi che tali siano i limiti della nutazione. Se adunque l' equazione del lunar perigeo per aumentare la nutazione fosse di uno, o due secondi, esso verrebbbe ad alterare tutta questa ricerca. Potrebbe apparire la nutazione di 20″, quando collocato il lunar perigeo diversamente, cioè in maniera tale, che corresse la distanza media lunare, essa nutazione scemasse di 2″, e così fosse di 18″, secondo l' ipotesi di *Bradlejo*. Ed in senso contrario, se la nutazione fosse boreale, ed il lunar perigeo si ritrovasse ne' segni australi, e specialmente verso il principio del Capricorno, la nutazione attuale scemando di 2″ apparirebbe di 18″, quando essa fosse di 20″.

A' primi calcoli da me tessuti, come espongo lungamente nella Memoria estesa, ho ritrovato appunto, che l' equazione massima del lunar perigeo, per aumentare, o per diminuire la nutazione, si accostava a 2″. Potendo essi adunque far variare i risultati in una materia così sottile, e così gelosa, mi è convenuto tener dietro alla teoria del lunar perigeo, ed alle sue equazioni. Mi è convenuto formare una Tavola, per l' equazioni dello stesso perigeo. Mi è convenuto ridurre le quattro mie combinazioni non solamente al principio della Libra, o dell' Ariete, ma ancora alla distanza media lunare, affinchè la sua azione sia nulla, e così non possa nè aumentare, nè diminuire il vero valore della nutazione.

Stabilito così questo secondo elemento, ho dovuto con esso ricalcolare la Tavola, che ho inserita alla pagina 82 della Dissertazione del 1775, introducendo in essa questo nuovo elemento, cioè dell' equazione per il lunar perigeo. Nella detta nuova Tavola sono calcolate le vere obbliquità dell'

ecclittica dal 1775 al 1802 coll' elemento del perigeo lunare. In essa pure la nutazione, che facevasi di 20″, è stata corretta secondo le moderne osservazioni. In essa finalmente è stato messo un accordo nell' epoca dell' obbliquità osservata a Parigi, ed a Firenze. In tal epoca vi era una differenza di 6″ incirca. Io dunque avendo diminuita la latitudine Fiorentina di 6″, rispetto a quella fissata nel 1756 nel mio Gnomone, ho proccurato un accordo tra le due epoche, per andare in avvenire con tutta l' uniformità, e corrispondenza nelle osservazioni Parigine, e Fiorentine.

Non so su quali osservazioni la latitudine Fiorentina nella *Connoissance des temps* di questi anni si stabilisca di 43°. 46′. 30″, quando essa è certamente maggiore.

Nel libro dello Gnomone sono state descritte tutte le osservazioni da me fatte nel 1755, e 1756 sulla stella polare, ed il loro risultato, che fu della latitudine di 43°. 46′, 53″. Avendone ora detratti 6″ per le ragioni, che accennerò, resterà tal latitudine alla Cupola della Cattedrale di 43°, 46′, 47″.

Formate le due Tavole, cioè delle diverse nutazioni del polo terrestre a diverse posizioni del nodo ascendente lunare, e delle diverse equazioni, ora additive, ed ora sottrattive, che corrispondono alle diverse longitudini del lunar perigeo, ora altro non resterebbe, se non che la formazione delle altre Tavole, per ben rappresentare i piccoli apparenti movimenti delle stelle fisse, che si trovano sensibilmente lontane dal coluro de' solstizj. Ma una tal ricerca è per se stessa assai facile, applicandole gli elementi da me ritrovati, ed è estranea all' oggetto presente, che consiste nel ben rappresentare le oscillazioni delle obbliquità dell' ecclittica per la combinazione del suo moto secolare periodico, e del moto oscillatorio originato da' nodi lunari, e dal lunar perigeo.

Se l' esito di queste mie ricerche corrisponderà negli anni futuri alle immediate osservazioni dell' obbliquità dell' ecclittica, e delle posizioni delle stelle fisse, vuol rimettersi alla decisione del tempo, e de' più accurati osservatori. Questa è la più sottile ricerca della moderna Astronomia. Onde senza un tempo ben lungo, ed una serie di squisitissime osservazioni, non potremo ottenere certezza maggiore della presente.

ARTICOLO I.

Delle oſſervazioni Solſtiziali fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina queſt' anno 1782.

Incomincerò queſta breve Memoria dalle oſſervazioni ſolſtiziali fatte al grande Gnomone della Cattedrale Fiorentina del corrente anno 1782, tralaſciando per brevità tutte le annotazioni, e ricordi del regiſtro originale.

Per ridurre dette oſſervazioni al momento ſolſtiziale vi va detratta la differenza in declinazione tra 'l dì ſolſtiziale, che fu il dì 21 di Giugno, ed il dì di una data oſſervazione. E come le Tavole ſolari del Sig. *Abb. la Caille* ſono calcolate al meridiano di Parigi, la detta differenza va ridotta al meridiano Fiorentino. Con tali riduzioni riporterò le diſtanze del centro ſolare dal vertice, detraendo da eſſe la differenza in declinazione colla riduzione al meridiano.

La prima oſſervazione fu fatta il dì 15 Giugno, ma paſſando per i trafori del feneſtrone auſtrale del Cupolino de' raggi di una luce ſpuria, che alteravano l' immagine ſolare formata da' raggi centrali, eſſa reſtò tanto dubbioſa, che non potè farſene conto. Indi è che io comincerò il preſente regiſtro dall' oſſervazione del dì 17, che ſecondo l' ordine ſarebbe la ſeconda, ma tralaſciata la prima, eſſa occuperà il ſuo poſto.

OSSERVAZIONE I.

Del dì 17. *Giugno.*

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	37'.	17"	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	5.	24.	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	0.	15.	56.	50.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	21.	20.	50.

	Gradi Min′. Min″. Cent.
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .	3. 10.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 10. 50

Osservazione II.

Del dì 18. *Giugno*.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°. 35′. 59″. 50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20. 3. 36
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	0. 16. 11. 50.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 19. 47. 50.
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino . . .	0. 1. 42. 00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 5. 50

Osservazione III.

Del dì 19. *Giugno*.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°. 35′. 18″. 50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20. 2. 36.
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	16. 21. 25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 18. 57. 25.
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino . . .	0. 45.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 12. 25

OSSERVAZIONE IV.

Del dì 20. Giugno.

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	34'.	43''.	
Diſtanza dell' orlo boreale . . .	20.	1.	54.	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	24.	50
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	18.	50
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino			10.	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	8.	50

OSSERVAZIONE V.

Del dì 21. Giugno giorno ſolſtiziale.

Il ſolſtizio dell' anno corrente è accaduto quaſi ore 2 prima del mezzogiorno.

Diſtanza dell' orlo auſtrale dal zenith	20°.	34'.	32''	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	1.	49	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	21.	50
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	10.	50

La riduzione tanto per la declinazione, quanto pel meridiano Fiorentino, quanto pure della diſtanza del momento ſolſtiziale dal mezzogiorno è affatto inſenſibile. Onde ſi tralaſcia.

OSSERVAZIONE VI.

Del dì 22. Giugno.

	Gradi Min'. Min''. Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°. 34'. 51''. 50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20. 2. 00. 00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	16. 25. 75
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 18. 25. 75
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .	16. 00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 9. 75

OSSERVAZIONE VII.

Del dì 24. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°. 35'. 28''
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20. 2. 44
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	16. 21. 75
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 19. 6. 25
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .	0. 54. 00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 12. 25

OSSERVAZIONE VIII.

Del dì 24. Giugno.

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	36'.	30''.	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	3.	46	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	22	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	20.	8	
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		2.	00	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	8	

OSSERVAZIONE IX.

Del dì 25. Giugno.

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	37.	59.	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	5.	14.	50
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	22.	25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith.	20.	21.	36.	75
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		3.	29	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	7.	75

OSSERVAZIONE X.

Del dì 26. Giugno.

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	39'	52''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	7.	00.	00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	26.	25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	23.	26.	25
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino		5.	20.	40
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	5.	45

OSSERVAZIONE XI.

Del dì 27. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith , ...	20°.	42'.	11''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	9.	24.	20
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	23.	65
Diſtanza del centro ſolare dal zenit	20.	25.	47.	95
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino		7.	38.	06
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	9.	89

OSSERVAZIONE XII.

Del dì 28. Giugno.

	Gradi Min'. Min''. Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°. 44'. 48''
Diſtanza dell' orlo boreale	20. 12. 06
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	16. 21
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 28. 27
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	10. 19. 68
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotto	20. 18. 7. 32

OSSERVAZIONE XIII.

Del dì 30. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20. 51. 34. 25
Diſtanza dell' orlo boreale	20. 18. 42. 00
Semidiametro ſolare indi dedotto . .	00. 16. 55. 81
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20. 35. 8. 12
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00. 16. 55. 81
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20. 18. 12. 31

OSSERVAZIONE XIV.

Del dì 1. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20. 55. 24. 00

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	22.	38.	00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	23.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	29.	01.	00
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00.	20.	56.	36
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	4.	64

Osservazione XV.

Del dì 2. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	59.	46.	00
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	26.	56.	00
Simidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	25.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	43.	21.	00
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00.	25.	16.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	5.	00

Osservazione XVI.

Del dì 3. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	21.	4.	32.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	31.	42.	50
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	25.	00
Diſtanza del centro ſolare del zenith	20.	48.	7.	50
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed				

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
al meridiano Fiorentino	00.	30.	0.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	7.	50

Della media diſtanza del centro ſolare dal vertice ridotta al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino.

Eſſendo deſcritta, come dubbioſa, la prima oſſervazione del dì 15. Giugno, a motivo de' raggi eſtranei ſolari che turbavano la terminazione degli orli ſolari, dovremo eſcluderla, e prevalerci ſoltanto delle XVI oſſervazioni ſuſſeguenti dal dì 17. Giugno ſino al dì 3. Luglio. Recapitolando adunque i loro riſultati ſarà

	Gradi	Min'.	Min''.	Cen.
Per l' oſſervazione II. diſtanza dal zenith corretta	20.	18.	10.	50
Per la III.			5.	50
Per la IV.			12.	25
Per la V.			8.	50
Per la VI			10.	50
Per la VII.			9.	75
Per la VIII.			12.	25
Per la IX.			8.	00
Per la X.			7.	75
Per la XI.			5.	45
Per la XII.			9.	89
Per la XIII.			7.	32
Per la XIV.			12.	31
Per la XV.			4.	64
Per la XVI.			5.	00
Per la XVII.			7.	50
Eſſendo la ſomma de' ſecondi 137''. 11 cen. dividendola per le XVI oſſervazioni, ſarà la diſtanza media ſolare dal zenith	20.	18.	8.	55

Articolo II.

Rifleſſioni ſulla diſtanza media già dedotta, e corriſpondenza delle oſſervazioni tra di loro.

Prima di oltrepaſſare alle conſeguenze, che da queſte oſſervazioni ſi dedurranno, ſarà ben fatto di riflettere, che la diſtanza ſolare media al zenith ridotta, come è ſtato fatto, concorda così bene con un buon numero di oſſervazioni, che il ſuo divario da eſſe batte ad 1″, o poco più.

Tali ſono le oſſervazioni V, VII, IX, X, XII, XIII, e XVII. Onde, come ciaſcuno potrà riſcontrare, la media diſtanza già dedotta differiſce da queſte VII oſſervazioni preſſochè di 1″, argomento aſſai certo della preciſione di queſte oſſervazioni.

Le più diſcordanti dalla media, una per difetto, e l' altra per eceſſo, ſono la XV, e la XIV. La prima ci preſenta 4″. 64 cen. Ond' eſſa è minore della media di . . 3″. 91 cen.
La ſeconda, che è l' eceſſiva, ci dà . . . 12. 31 cen.
che differiſce da . . . . 8. 55 cen.
di 3″. 36. cen.
Tutte le altre o eccedono, o ſcarſeggiano più di 1″, e meno di 3″. 36 cent. Il che pure ci paleſa l' eſattezza di queſte oſſervazioni al vaſtiſſimo Gnomone della Cattedrale.

Merita però, che alla prima rifleſſione ſi aggiunga la ſeconda, particolarmente per gli Aſtronomi, che non hanno mai fatte delle oſſervazioni alle gran meridiane, e perciò ne hanno un' idea molto confuſa, per non dire erronea. Queſta è che una buona parte di tali differenze hanno un' origine, che non dipende dalla natura delle meridiane, ma bensì dall' indole delle refrazioni, che ſono ſuſcettibili di qualche varietà ſecondo i venti, ſecondo gli ſtati dell' atmosfera, che attraverſano i raggi ſolari, e ſecondo i terreſtri vapori, che in ſu ſi ſollevano paſſando a traverſo de' raggi, che ſi portano o al corno della meridiana, o ancora a teleſcopj i più perfetti. Io parlo di quella oſcillazione, di quel tremolío, che ſi oſſerva negli orli ſolari dell' immagine, che

paſſa per una meridiana. Il filo della penombra, benchè aſſai diſtinto, vacilla ſenſibilmente, ſcintillando, per così dire, come fanno le ſtelle fiſſe, ed è coſa aſſai malagevole nel mezzo di tal tremolío, che i due oſſervatori o dell' orlo auſtrale, o del boreale poſſano con ogni preciſione collocare i loro fili ad ugual diſtanza dal centro. Oſſervando io attentamente tale oſcillazione, e paragonandola alle diviſioni della meridiana, ho giudicato che paſſi i $2''$ per parte. E ſiccome tal tremolío dipende dalle attuali, e momentanee diſpoſizioni della terreſtre atmosfera, così era da ſoſpettare che lo ſteſſo fenomeno accadeſſe ancora ne' migliori teleſcopj.

Ho voluto verificare il mio ſoſpetto colla immediata oſſervazione ſolare nel ſuo paſſaggio al meridiano ne' giorni ſuſſeguenti al dì 3 Luglio, in cui furono compite le oſſervazioni allo Gnomone della Cattedrale.

Ho traſcelto un teleſcopio acromatico dollondiano di braccio $1\frac{1}{4}$ di foco, che fanno qualche coſa più di piedi 3 Parigini. Ho collocato eſattamente il filo orizzontale del ſuo micrometro, paragonandolo con alcune ſabbriche orizzontali. Indi dirigendolo al Sole ſul punto del mezzogiorno in tal maniera, che il filo radeva preciſamente l' orlo ſolare boreale, un tal orlo ancor eſſo vacillava, ora naſcondendoſi affatto ſotto del filo, ed ora traſparendo ſopra il medeſimo. La differenza per quanto può giudicarſi non era minore di $2''$, particolarmente in giornate calide, e vaporoſe, che fanno un cambiamento momentaneo, e continuo nell' atmosfera. Per la qualcoſa, ſe qualche Aſtronomo non verſato nelle oſſervazioni delle gran meridiane voleſſe avere una riprova della loro eſattezza, altro far non dovrebbe, che con un quadrante di ſei piedi di raggio fare una quindicina, o ventina di oſſervazioni prima, e dopo il ſolſtizio eſtivo, e poi riteſſendo i ſuoi calcoli dedurre la diſtanza media corretta. Benchè io non abbia fatta alcuna ſerie di tali oſſervazioni, pure ardiſco di ſoſpettare, che detta media diſtanza ſi ſcoſterà, o ugualmente, od ancora più dalle altre diſtanze medie ridotte col preſente mio metodo.

In altra riprova potremo dedurre intorno alla corriſpondenza di queſte mie oſſervazioni, riflettendo a' ſemidiametri ſolari oſſervati dal dì 19 Giugno ſino al dì 3 Luglio. E ſta-

to avvertito nel regiſtro delle mie oſſervazioni, che paſſava una luce ſpuria ſulla meridiana, la quale alterava il filo delle due penombre. Nell' oſſervazione I. tale alterazione era troppo ſenſibile. Era minore nella II, e nella III, ma non ſi potè giugnere ad eſcludere ogni raggio eſtraneo, ſe non dopo il dì 18. Onde da quel giorno ſino all' ultimo la luce dell' immagine era viviſſima, e così il diametro della medeſima fu maggiore, come ſuol eſſere, ma reſtando coſtante la chiarezza dell' immagine ſino al dì 3 Luglio; veggiamo in detto tempo qual corriſpondenza abbiano i ſemidiametri ſolari apparenti. Il regiſtro di tali ſemidiametri baſta per decidere. Sarà dunque ſemidiametro ſolare nell'

	min'.	*min''.*	*cen.*		*min'.*	*min''.*	*cen.*
Oſſervazione IV.	16.	21.	25	Nella XI. .	16.	26.	25
Nella V. .	16.	24.	55	Nella XII. .	16.	23.	65
Nella VI. .	16.	21.	50	Nella XIII. .	16.	21.	00
Nella VII. .	16.	25.	75	Nella XIV. .	16.	26.	12
Nella VIII. .	16.	21.	75	Nella XV. .	16.	23.	00
Nella IX. .	16.	22.	00	Nella XVI. .	16.	25.	00
Nella X. .	16.	22.	25	Nella XVII.	16.	25.	00

Ora tra queſte XIV oſſervazioni calcolando il ſemidiametro medio eſſo ſi troverà di 16′ 23″, 50 centeſime, che dalle oſſervazioni eſtreme per eccеſſo, o per difetto non diſcorda di 3″, e che ſi accorda con tutte le altre con una differenza di 1″ in 2″.

Avvertaſi, che il ſemidiametro ſolare calcolato con le Tavole dal dì 19 Giugno al dì 3 Luglio non differiſce, che di $\frac{1}{4}$ di ſecondo. Onde può conſiderarſi nel caſo noſtro, come coſtante.

Non eſſendo coteſte le oſſervazioni dell' immagine ſolare colle correzioni delle penombre, come ho fatto nelle oſſervazioni del 1755, e 1756, non dee far maraviglia, che l' apparente ſemidiametro della meridiana ſia maggiore del giuſto. Ma adoperando la debita correzione, o col metodo del Sig. *Manfredi* di ſottrarre il ſemidiametro del foco, o coll' altro mio metodo eſpoſto nel mio Tomo dello Gnomone, eſſo ſi accoſterà a 15′, 47″, che è il ſemidiametro calcolato nelle Tavole.

Ancor

Ancor qui ripeterò, che facendo sedici, o più osservazioni con un telescopio acromatico, o con un buon quadrante murale, pigliando ne' giorni solstiziali coll' immediata misura il semidiametro solare, forse la misura media discorderà ugualmente dalle misure estreme, che non deducasi dalle mie osservazioni meridiane.

La riprova tanto delle medie solari dal vertice, quanto de' semidiametri solari in buon numero di osservazioni starà sempre in mano degli Astronomi, che non hanno la giusta idea delle grandi meridiane. Ed io altro non posso fare, che esortargli alla pazienza necessaria in somiglianti lunghe osservazioni.

Nè fa difficoltà, che o per una luce estranea, o per la caligine dell' atmosfera i semidiametri solari alle meridiane diminuiscano. Poichè la penombra australe, e la boreale si alterano ugualmente. Indi è, che non per questo resta alterata la distanza del centro.

ARTICOLO III.

Equazione generale additiva alla media distanza ridotta del centro solare dal vertice dell' obbliquità dell' ecclittica nell' anno corrente 1782.

Assicurata, com' è stato fatto, la distanza media solare dal vertice, ed essendo stata indi dedotta la detta distanza ridotta tanto al momento solstiziale, quanto al meridiano, ora altro non resta, se non che applicare alla medesima l' equazione generale già fissata all' articolo X, pag. 67 della mia prima Dissertazione.

E' composta tal' equazione, come potrà vedersi, di partite additive, e sottrattive, ed il residuo rimane additivo, ed è secondo il citato articolo di 20″. 69 centesime, come alla pag. 68. Essendo però inclusa in tali partite quella, che appartiene al nodo ascendente lunare del 1775, che è additiva, ed ivi è stata calcolata di 0′. 55 centesime, essa va esclusa nella presente ricerca, dovendosi introdurre l' equazione competente all' anno corrente, come si farà a suo luogo.

Adunque detraendo all' equazione dalla totale di . . . . 20″. 69 cent.,
resterà l' equazione per l' anno corrente di 20. 14 cent.

Essendo adunque la distanza media ridotta di . . . . : . 20°. 18′. 8″. 55 cent.

avremo la distanza dal vertice aggua-gliata per il dì solstiziale di . . . . . 20°. 18′. 28″. 69 cent.

Per ottenere l' obbliquità attuale dell' ecclittica ne' dì solstiziali del 1782, convien ripigliare la latitudine Fiorentina al punto della Cattedrale, che fu da me dedotta con molte osservazioni della stella polare l' anno 1756, e 1757. Essa fu di . . . . 43°. 46′. 53″. 00,

come potrà vedersi nel Tomo dello Gnomone Fiorentino.

Onde sottraendo la distanza dalla latitudine, ne dedurremo l' obbliquità dell' ecclittica pel dì 21 Giugno 1782 di . 25°. 28′. 24″. 31 cent.

ARTICOLO IV.

Paragone di tal obbliquità con quella osservata da me allo stesso Gnomone nel 1775.

Nella mia Dissertazione Astronomica pubblicata in Livorno nel 1776 sono registrate tutte le osservazioni di quell' anno, ed applicate le debite equazioni è stata dedotta l' obbliquità di quell' anno.

Prima di farne il paragone, convien togliere dall' equazion generale quella, che vi è introdotta per la differenza della nutazione per la posizione diversa del nodo lunare del 1756, e del 1775, la qual differenza, come è stato rilevato, è di 0″. 55 centesime.

Indi è, che l' equazione generale riducesi a . . . . 20. 14 cent.

La media delle XIII osservazioni di

quell' anno fu di . . . . 20° 18'. 22''. 85 cent.

A cui aggiungendo l' equazion generale di 20. 14

otterremo la distanza del centro solare dal vertice di 20. 18. 42. 99

Ma la latitudine Fiorentina è di 43. 46. 53

Onde sottraendo la distanza dalla latitudine, sarà . . . . 23°. 28'. 10''. 01 cent.

che è l' obbliquità attuale del 1775.

Avvertasi, che tale obbliquità alla pag. 73 di quella Dissertazione è stata dedotta di 23°. 28'. 9''. 46 cent., e ciò per l' equazione de' nodi lunari, che ivi è racchiusa, la quale essendo stata tolta, sarà l' obbliquità senza tal equazione di . , ... 23°. 28'. 10''. 01 cent.

Ma l' obbliquità del corrente anno 1782 è di 23. 28. 24. 31

Onde vi si scorge la differenza additiva di . . . . 00. 00. 14''. 30 cent.

Or questa differenza, quando sarà ridotta coll' equazione del nodo ascendente lunare, tanto nel 1775, quanto nel corrente anno 1782, insieme coll' altra riduzione del periodo secolare dell' ecclittica, ci paleserà la nutazione totale dell' asse terrestre.

ARTICOLO V.

Paragone di tale obbliquità con quella della Conoscenza de' tempi di Parigi nell' anno corrente.

A dì 21 Giugno è registrata nella Conoscenza de' tempi, che annualmente si pubblica a Parigi, di 23°. 27' 59''

Essendo l' obbliquità da me dedotta di 23. 28. 24. 30,

tra l' una e l' altra vi corre il divario di 0. 0. 25. 30.

Un tal divario nasce dall' opinione seguitata finora da' Compilatori di quella Efemeride, cioè, che il periodo secolare della diminuzione dell' ecclittica sia di 47''. Indi è, che incominciando dall' epoca del 1750, o altra, che essi hanno segui-

tata, le ſottrazioni per il periodo ſecolare ſono ſtate maggiori del vero. Qualche differenza vi ſarà pure nell' epoca. Per tal cagione adunque le obbliquità attuali di quella Efemeride ſarà ſempre minore della vera. Se ſi è ſeguitata l' ipoteſi del periodo ſecolare di 88″, queſti in anni 32, dal 1750 al 1782 porterebbero la differenza di 28″, che ſono più di 25″. 30 centeſime. Comunque ſiaſi, certo è che l' obbliquità di quella efemeride è troppo ſcarſa. Eſſa è ancora tale riſpetto alle oſſervazioni aſtronomiche fatte in queſt' anno a Parigi dal Sig. de la *Lande* a tenore delle quali l' obbliquità attuale è di 23°. 28′. 16″, come appariſce da corteſe lettera del medeſimo Aſtronomo.

Paragonando tale oſſervazione alle mie, non altro divario ſi trova, che di 8″.

Articolo VI.

Paragone di tal obbliquità da me oſſervata con quella del 1956 regiſtrata nel mio Volume dello Gnomone.

Per le prime oſſervazioni fatte allo Gnomone Fiorentino dopo la coſtruzione della preſente meridiana, l' obbliquità dell' ecclittica del 1756 dedotta con gran numero di oſſervazioni fu di . . . . 23°. 28′. 15″, 58 cent.

Eſſendo adunque l' obbliquità dell' anno corrente di 23. 28. 24. 30

tra l' una e l' altra vi corre la differenza di . . . . 00. 0. 8. 32 cent.

Conviene avvertire, che nel 1756 il nodo lunare va non lungi dalla Libra, come ſi calcolerà in appreſſo. In oltre da tal tempo ſino al preſente anno vi corrono anni 26, a cui ſecondo il periodo ſecolare di 34″. 42 centeſime competono 8″. 95 centeſime. Si vedrà in appreſſo nel calcolo, che ſi farà della maſſima nutazione, che tutto queſto combina colle leggi di detta nutazione, e col periodo ſecolare di 34″. 42 centeſime.

ARTICOLO VII.

Paragone della ſteſſa obbliquità con quella, che è regiſtrata nella Tavola della mia prima Diſſertazione.

Alla pagina 82 della prima Diſſertazione pubblicata nel 1776 ſono ſtate calcolate tutte le obbliquità dell' ecclittica, incominciando dal 1775 ſino al 1801. Conſultando in detta Tavola l' anno preſente 1782 vi ſi vede regiſtrata l' attual obbliquità dell' ecclittica di . . . . . 23°. 28'. 25". 26 cent.
Eſſendo eſſa per le oſſervazioni di 23. 28. 24. 30
non vi ſi ſcorge altro divario che di . 0. 0. 0. 96 cent.

Ora una sì ſtretta corriſpondenza tra l' oſſervazione e la Tavola fa ben comprendere, che le ipoteſi, ſulle quali eſſa è fondata, ſono aſſai vicine alla verità. Queſte ipoteſi ſono, che la nutazion totale ſia, non già di 18", ma bensì di 20".

E che il periodo ſecolare della diminuzione dell' obbliquità ſia, non già di 47", ma bensì di 34" incirca.

ARTICOLO VIII.

Del vero valore della nutazion totale dell' aſſe terreſtre dedotto da più combinazioni maneggiate colle oſſervazioni ſolſtiziali del 1756, 1764, 1775, *e* 1782.

L' oggetto principale di queſta diſſertazione è ſtato quello di verificare con tutte quelle combinazioni, che ſi potrà, qual ſia il vero valore della nutazione dell' aſſe terreſtre, mentre il nodo aſcendente lunare paſſa dal principio della Libra ſino al principio d' Ariete con moto retrogrado. Quanto una ſimil ricerca ſia rilevante per la moderna Aſtronomia, e per correggere, e ridurre con eſſa tutte le oſſervazioni delle ſtelle fiſſe, e delle declinazioni ſolari, ſi comprende da ognuno, ſenza che io mi metta a comprovarlo.

Il Sig. *Bradlejo*, come è ſtato diviſato nell' art. I., faceva tal nutazione di 18", e deduceva dalle ſue oſſervazioni, fatte dal 1728 al 1747, che con tale ipoteſi felicemente ſpiegavan-

si alcune varietà, che soffrivano le stelle fisse, che non potevano soggettarsi nè alla legge delle aberrazioni, nè a quella della paralassi dell'orbe annuo. Egli però non nega, che qualche divario di 2″ in 3″ si ravvisa in alcune posizioni delle stelle fisse.

Dopo di lui tutti gli Astronomi hanno seguitata la di lui ipotesi di 18″. Se non che il chiarissimo Sig. de la *Lande*, osservando, che tal ipotesi non corrispondeva a' fenomeni delle maree, secondo i quali le forze solari, e lunari avevano una diversa proporzione di quella, che nasceva da tal ipotesi, propose, che detta nutazione si aumentasse di 1″, facendola di 19″, invece di 18″. Ma egli si serve di tale ipotesi non appoggiandola ad alcuna osservazione.

Io ho fatto vedere nell' art. I. della Prop. XV, che la nutazione, ancora di 20″, corrispondeva benissimo a' fenomeni delle maree, e ad altri fenomeni della precessione degli equinozj.

Inoltre nel 1775 io ho adoperata una tale ipotesi per le osservazioni solstiziali comparative dal 1756 al 1764, secondo le quali sembra indubitato, che la nutazione sia di 20″, ed ancora di più.

Ripigliando ora da capo questa sottile, ma importante ricerca, io mi sforzerò di esaminarla in alcune combinazioni; e sono le seguenti

Combinazioni formate colle osservazioni solstiziali del 1756, 1764, 1775, *e* 1782, *per dedurne la vera nutazione dell' asse terrestre, riducendola al principio di Ariete, o della Libra, e correggendola coll' equazione del lunar perigeo.*

COMBINAZIONE I

Delle osservazioni del 1756 *con quelle del* 1764.

Nel 1756 l' obbliquità immediatamente osservata e dedotta con gran numero di osservazioni alla Cattedrale fu di . . . . 23°. 28′. 15″. 58 cent., come può riscontrarsi nel mio Gnomone Fiorentino.

Non giungeva allora il nodo aſcendente lunare al principio della Libra, e per ridurvi la nutazione mancava 1″. Onde la nutazione auſtrale ſarebbe diminuita di queſto 1″, che è ſottrattivo.

Onde l'obbliquità ridotta al principio della Libra ſarà di . . . . 23°. 28′. 14″. 58 cent.

Il lunar perigeo era ne' ſegni auſtrali, ne' quali era la nutazione. Onde tendeva ad aumentare tal nutazione di 1″. 92 cent. ſecondo il calcolo. Onde in vece di 10″ tal nutazione era di 11″. 92. E così all' obbliquità dell' ecclittica toglieva 1″. 92 di più, che non ſarebbe alla media lunar diſtanza, e perciò conviene aggiungere tale equazione di 0. 0. 1″. 92

Così ſarà l'obbliquità doppiamente ridotta di . . . . 23°. 28′. 16″. 50 cent.

Per le oſſervazioni del 1764 era l'obbliquità di . . . . 23°. 28′. 32″. 17 cent.

come rilevaſi da una mia Memoria inedita compoſta in quell' anno. Ma qui è convenuto ridurla ſecondo il nuovo metodo.

L' equazione per ridurla al principio d' Ariete è inſenſibile, giacchè il nodo lunare era così proſſimo al 0 d' Ariete, che mancavano ſoli 35′, che fanno un' equazione inſenſibile, come ciaſcuno comprenderà.

L' equazione del perigeo lunare era additiva di . . . . 0″. 82 cent.

onde aggiungendole a 23. 28. 32. 17

ci paleſa l' obbliquità ridotta di . . 23. 28. 32. 99

Ma eſſendo traſcorſi anni 8 dal 1756 al 1764, intanto per il periodo ſecolare è accaduta la diminuzione di . . 2″. 75

che va ſupplita con aggiungerla.

Onde l' obbliquità con tal nuova riduzione ſarà di 23. 28. 35. 74

Da cui detraendo l'obbliquità ridotta del 1756 . . . . 23. 28. 16. 50

resterà la nutazione corretta di . . .	0. 0. 19. 24

COMBINAZIONE II

Delle osservazioni del 1764 con quelle del 1775.

L' obbliquità osservata nel 1775 fu di come potrà rilevarsi dalla mia Dissertazione stampata in Livorno l' anno susseguente 1776.	23°. 28'. 9''. 46 cent.
Nel detto anno era australe la nutazione, e non giungeva a 0 della Libra, mancandone ancora 1''. 35 cent. le quali avrebbero fatto diminuire di più l' obbliquità. Sicchè sottraendo	0. 0. 1. 35
sarà l' obbliquità per la prima riduzione di	23°. 28'. 8''. 11 cent.
L' equazione del perigeo lunare additiva di	1. 26
Onde per la seconda riduzione sarà	23°. 28'. 9''. 37 cent.
Dal 1764 al 1775 sono scorsi anni 11, in cui l' obbliquità è diminuita per il periodo secolare di	3. 78
Onde aggiungendole sarebbe l' obbliquità del 1775 per le tre riduzioni di	23°. 28'. 13''. 75 cent.
Ma nel 1764 per le due riduzioni era di	23. 28. 32. 99
Sicchè detraendo dalla medesima . .	23. 28. 13. 15
resterà la nutazione di questa combinazione di	0. 0. 19'' 84 cent.

COMBINAZIONE III

Delle osservazioni del 1775 con quelle del corrente anno 1782.

Nel 1782 l' obbliquità osservata fu di	23°. 28′. 24″. 30 cent.
Per ridurla al principio dell' Ariete si aggiunga	0. 0. 0. 24
E per ridurla alla distanza media lunare si aggiunga l' equazione . . .	0. 0. 1. 25
Sarà l' obbliquità colla doppia riduzione di	23. 28. 25. 80
Dal 1775 al 1782 sono corsi anni 7, in cui il moto periodico porta additivi	0. 0. 2. 40
Onde l' obbliquità del 1782 colle tre riduzioni sarà di	23. 28. 28. 20
Ma quella del 1775 per le due riduzioni era di	23. 28. 9. 31
E così la nutazione per questa combinazione sarà di	0. 0. 18″. 89 cent.

COMBINAZIONE IV

Delle osservazioni del 1756 con quelle del 1782.

Obbliquità del 1782 colle due riduzioni	23°. 28′. 25″. 80 cent.
Obbliquità del 1756 colle due riduzioni	23. 28. 16. 50
Loro differenza	0. 0. 9″. 30
In anni 26 dal 1756 al 1782 la diminuzione secolare è stata di 8″. 95 cent. secondo la solita ragione di 32″. 42 per secolo. Onde supplendo	0. 0. 8. 95
ne risulterà la media nutazione di	0. 0. 18″. 25 cent.

Recapitolazione delle nutazioni per le IV Combinazioni.

Nutazione ridotta per la Combinazione I.	19″. 24 cent.	
Per la Combinazione II.	19. 84	
Per la Combinazione III.	18. 89	
Per la Combinazione IV.	18. 25	
Somma delle nutazioni	76. 22 cent.	
Tra le quali la media è di	19. 05 $\frac{1}{2}$ cent.	

Ora tal media nutazione si accorda colle altre più discrepanti in meno di 1″.

La più discorde per eccesso è la II di 19″. 84, e la differenza è di 0″. 78 centesime.

La più discorde per difetto è la quarta di 18″. 25, e la loro differenza è di 0″. 80 cent.

L' uniformità di tali risultati, che dipendono da molti elementi, ci fa conoscere la loro precisione.

Sarebbe maggiore la discordanza di una coll' altra, se non s' introducesse l' elemento del lunar perigeo. Onde questo vien comprovato col fatto medesimo.

Forse questo nuovo elemento combinato colla nutazione, che senza la frazione di 5 $\frac{1}{2}$ centesime può farsi in avvenire di 19″, cioè 1″ di più del *Bradlejo*, metterà un accordo maggiore, non solo tra le osservazioni Braldejane, ma ancora tra le altre assaissime di altri Astronomi. Ma per decidere vi vogliono nuove esattissime osservazioni delle stelle fisse fatte con grandi settori di 14, e di 16 piedi. Intanto però io fisserò la nutazione di 19″, e con essa continuerò gli altri calcoli, che occorreranno.

ARTICOLO IX.

Conseguenze, che si deducono dal vero valore della nutazione.

Confrontando così bene tra di loro le quattro Combinazioni dalle quali è stata dedotta la nutazione totale, potremo con sicurezza seguire da ora innanzi la media nutazione già

dedotta di 19. 05,

giacchè essa non differisce da' limiti delle estreme, e più discordanti, se non che di 0. 80 cent. che è una assai piccola frazione. E per secondare frazioni più semplici, essa potrà fissarsi di . . . . 19. 00.

Prima di far passaggio alle conseguenze della nutazione, già determinata, piacemi di sciogliere una difficoltà, che far si potrebbe contro il metodo delle riduzioni, che è convenuto fare per ottenere le intere nutazioni. Poichè potrebbe opporsi, che tali riduzioni suppongono la nutazione totale di 20″, onde esse suppongono fissato quel valore, che per mezzo di esse va rintracciandosi. Ma sparirà tal obbietto agli occhi di coloro, che rifletteranno intorno al valore di tali riduzioni, il quale è così piccolo, che l' errore, che potrebbe nascere di 1″, o nell' ipotesi di 9″ secondo il *Bradlejo*, o nella mia di 10″, non può mai generare una differenza sensibile.

Sia per primo esempio la Combinazione II, nella quale è stata calcolata la nutazione australe di 8″. 65 centesime, e così la sua equazione del nodo di 1″. 35 cent. Se invece del seno totale espresso per 10″ valesse quello di 9″, altro non dee farsi, se non che diminuire detta equazione nella ragione del 10 : 9, ed allora l' equazione sarebbe di 1″. 215 millesime, che differisce dalla prima di sole 145 millesime.

Minore sarà la differenza nella Combinazione I, in cui l' equazione del nodo per il 1756 è di 1″. 00. Onde diminuendo ancor qui nella ragione del 10 : 9 otterremo 0″.90 cent. con differenza di un decimo di secondo.

E molto minore ancora sarà la riduzione del nodo per il 1782 nella Combinazione III, in cui l' equazione è stata di 0. 24 centesime. Onde fatta la riduzione sarà di 0″. 216 millesime.

Indi è che per tal tenuità delle differenze, che nascono dalle due ipotesi di 10″, e di 9″, e molto più di $9''\frac{1}{2}$, il presente metodo non può mai dirsi difettoso.

Che se, essendo ora più precisamente fissato il vero valore della nutazione, volessero con esso rifarsi i computi delle quattro Combinazioni, sparirebbero così quelle piccole diffe-

renze, che si osservano nel primo calcolo, come si rileverà dalle conseguenze, che ne risultano.

Ed appunto la prima sarà, che le nutazioni boreali, ed australi tanto in declinazione, che in latitudine saranno in avvenire ne' medesimi punti del nodo ascendente lunare alquanto maggiori dell' ipotesi Bradlejana, e minori della mia adoperata nella Dissertazione del 1775. Essendo adunque nella mia Tavola del 1775 adoperata l' ipotesi di 10″, di nutazione boreale, ed australe, converrà ridurre tutte le obbliquità vere dal 1775 al 1801 colla nuova, e più precisa ipotesi di 9″. 50 cent. Sicchè lasciando tutte le obbliquità medie tali quali sono state in detta Tavola registrate, vi occorre la sola riduzione delle obbliquità vere.

Seconda conseguenza. Dovendosi inoltre introdurre la nuova Teoria del perigeo lunare, l'obbliquità, ridotta per la prima riduzione, va modificata per mezzo della posizione del lunar perigeo, secondo la legge da me divisata nella Teoria.

Terza conseguenza. Combinando insieme le due riferite riduzioni, ne nasce una Tavola delle obbliquità vere corrette dal 1775 al 1802, ed è la seguente

NUOVA TAVOLA

Delle obbliquità medie, e vere dell' ecclittica dal 1775 fino al 1802, calcolata sull' epoca del corrente anno 1782 sull' ipotesi della nutazione de' 19", sull' elemento del lunar perigeo, e della sua massima equazione di 2", e sulla latitudine Fiorentina di 43°. 46'. 47".

I	II	III	IV	V	VI	VII
Anni dal 21 Giugno	*Obbliquità medie dell' ecclittica.*	*Equazione additiva, o sottrattiva del nodo lunare.*	*Longitudine del nodo ascendente lunare*	*Longitudine del perigeo lunare*	*Equazione del perigeo lunare*	*Obbliquità vera ridotta dell' ecclittica*
	Gradi M.M'.cent.	*Min". Cent.*	*Segni Gra. M'.M".*	*Segni Gra. M'.M".*	*Secondi Cent.*	*Gra M'.M"·Cent.*
1775	23. 28. 11. 91	8. 13 sott.	IV. 27. 41. 00	X. 7. 22. 39	1". 26. add.	23. 28. 2. 52
1776	11. 56	5. 93	IV. 8. 21. 17	XI. 18. 9. 11	0. 11. add.	5. 52
1777	11. 22	3. 08	III. 19. 1. 34	O. 28. 49. 1	0. 46. sott.	8. 60
1778	10. 87	0. 48 add.	II. 21. 41. 51	II. 9. 28. 52	1. 74. add.	13. 09
1779	10. 53	3. 18	II. 10. 22. 8	III. 20. 8. 42	1. 78. add.	15. 49
1780	10. 19	5. 96	I. 21. 2. 25	V. 0. 55. 14	0. 49. add.	16. 64
1781	9. 84	8. 46	I. 1. 42. 42	VI. 11. 35. 4	0. 09. sott.	18. 21
1782	23. 28. 9. 50	9. 27	O. 12. 22. 00	VII. 22. 14. 5	1. 25. sott.	23. 28. 17. 52
1783	9. 15	9. 52	XI. 23. 3. 16	IX. 2. 54. 45	1. 99. sott.	16. 68
1784	8. 81	8. 51	XI. 3. 43. 33	X. 13. 41. 17	1. 07. sott.	16. 25
1785	8. 46	6. 64	X. 14. 23. 50	XI. 24. 21. 7	0. 03. sott.	15. 07
1786	8. 11	4. 01	IX. 25. 14. 7	I. 5. 0. 58	0. 65. add.	23. 28. 12. 77

Anni dal 21 Giugno	*Obbliquità media dell' ecclittica*	*Equazione additiva, o sottrattiva per il nodo lunare*	*Longitudine del nodo ascendente lunare*	*Longitudine del perigeo lunare*	*Equazione del perigeo lunare*	*Obbliquità vera ridotta dell' ecclittica*
	Gra. M'. M''. Cent.	*Secondi Cent.*	*Segni Gradi M'. M''.*	*Segni Gradi M'. M''.*	*Secondi Cent.*	*Gra. M'. M''. Cent.*
1787	7. 77	0. 44 add.	IX. 25. 44. 24	II. 15. 40. 48	0. 99 add.	9'. 9''. 70
1788	7. 42	2. 25 sott.	VIII. 16. 24. 41	III. 26. 27. 20	1. 64 sott.	6. 81
1789	7. 08	5. 14	VII. 27. 4. 58	V. 7. 7. 10	0. 33 sott.	2. 27
1790	6. 74	7. 50	VII. 7. 45. 15	VI. 17. 4. 1	0. 19 add.	23. 27. 59. 05
1791	6. 39	9. 00	VI. 18. 25. 32	VII. 28. 27. 51	1. 43 add.	55. 96
1792	6. 05	9. 49	V. 29. 5. 49	IX. 9. 13. 23	1. 96 add.	55. 60
1793	5. 71	8. 91	V. 9. 46. 6	X. 19. 53. 13	0. 86 add.	55. 94
1794	5. 37	7. 31	IV. 20. 26. 23	O. 0. 33. 4	0. 00	23. 27. 58. 06
1795	5. 02	4. 99	IV. 1. 6. 40	I. 11. 12. 54	0. 86 sott.	23. 28. 0. 89
1796	4. 68	1. 93	III. 11. 46. 57	II. 21. 59. 26	1. 95 sott.	4. 66
1797	4. 33	0. 27 add.	II. 22. 27. 14	IV. 2. 39. 16	1. 43 add.	5. 93
1798	3. 99	4. 39	II. 3. 7. 31	V. 13. 19. 7	0. 19 add.	23. 28. 8. 57
1799	3. 65	6. 84	I. 13. 47. 48	VI. 23. 58. 57	0. 30 sott.	10. 19
1800	3. 30	8. 64	O. 24. 28. 5	VIII. 4. 38. 47	1. 61 sott.	10. 33
1801	2. 96	9. 45	O. 5. 9. 0	IX. 15. 18. 37	1. 88 sott.	10. 53
1802	2. 62	9. 20	XI. 15. 49. 0	X. 25. 58. 28	0. 65 sott.	23. 28. 11. 17

Riflessioni sulla nuova Tavola delle obbliquità medie, e vere dell' ecclittica.

La Tavola delle obbliquità da me registrate alla pag. 28 della Dissertazione del 1775 va ridotta secondo le nuove osservazioni o risultati del corrente anno 1782.

Per uniformarsi all' epoca di Parigi, nella seconda colonna vanno sempre detratti 6'' dall' obbliquità media, essendo stato fissato di scemare la latitudine Fiorentina di 6'' ed aumentare la Parigina di 2''. Allora tanto in Firenze, che a Parigi l' epoca dell' anno presente porterà l' obbliquità di . . . . 23°. 28'. 18''
cioè 6'' di meno delle mie osservazioni, e 2'' di più delle osservazioni Parigine, secondo la quale essa è stata di 23. 28. 16,
come apparisce da lettera a me scritta dal Sig. de la *Lande*.

Sicchè incominciando la Tavola, in detto anno l' obbliquità media è registrata di 23. 28. 17. 91. centesime; e fatta la riferita detrazione sarà di 23. 28. 11. 91. centesime, e così discorrendo di tutte le obbliquità medie fino al 1802, dove la Tavola finisce.

Nella terza colonna di detta Tavola è registrata l' equazione o additiva, o sottrattiva della nutazione, la quale ho calcolato secondo l' ipotesi ivi adoperata della nutazione semplice di 10″. Ma è stato dimostrato nelle recenti osservazioni, che detta nutazione dee stimarsi di 9″ $\frac{1}{2}$, giacchè la nutazione composta viene di 19″ con una tenue frazione, che si trascura.

Indi è che ritenendo le stesse equazioni, che solo vanno scemate nella ragione del 100 : 95; così otterremo l' equazione corrispondente alla nuova ipotesi di 19″, o che sia additiva, o sottrattiva.

Una nuova colonna merita la nuova Tavola per l' elemento del lunar perigeo, introdotto da me nel calcolo delle nutazioni. La sua massima equazione australe, o boreale si fa da me di 2″, e potrà sempre rettificarsi dagli Astronomi con nuove, e lunghe osservazioni.

Per tal nuova equazione bisogna riflettere primieramente, che quando il lunar perigeo ritrovasi o nel principio dell' Ariete, o in quello della Libra, la sua equazione è nulla, giacchè allora operano le medie distanze lunari, che non aumentano, nè diminuiscono le nutazioni.

In secondo luogo, che quando il detto perigeo trovasi nel principio del Cancro, allora l'equazione è massima boreale, giacchè alla minima distanza lunare dalla terra dee corrispondere la massima sua energia, ed alla massima distanza la minima azione.

Che similmente, quando il perigeo trovasi nel principio del Capricorno, allora la nutazione australe è massima, e la boreale è minima. Indi è, che in tali due casi compete l' equazione di 2″ additiva, o sottrattiva. Stando il perigeo al principio del Cancro la nutazione boreale va accresciuta di 2″, e l' australe va scemata di 2″.

Stando essa al principio del Capricorno la nutazione australe va aumentata di 2″, e la boreale va scemata di 2″, secondo che trovasi la nutazione.

In generale quando la nutazione, ed il perigeo ſi trovano ne' ſegni della medeſima ſpecie, cioè o boreale o auſtrale, amendue, allora l'equazione del perigeo è additiva all'attual nutazione. Ma quando al contrario la nutazione, ed il perigeo ſi combinano in ſegni di ſpecie diverſa, cioè eſſendo la prima ne' ſegni boreali, il ſecondo trovaſi ne' ſegni auſtrali, e per converſo, allora l'equazione del perigeo è ſottrattiva alla nutazione attuale.

Tale addizione, o ſottrazione va così oſſervata, quando trattaſi di voler computare la nutazione attuale compoſta, cioè la nutazione, che l' Aſtronomo deve oſſervare. Mutano però i ſegni di additivi in ſottrattivi, e per converſo, quando trattaſi di dedurre le nutazioni totali dalle nutazioni immediatamente oſſervate, come è ſtato praticato nelle mie IV Combinazioni, da cui è ſtata dedotta la nutazione del polo.

Quando il lunar perigeo foſſe lontano da' quattro punti indicati, cioè da' due punti equinoziali, e da' due ſolſtiziali, allora le equazioni ſono in ragion duplicata de' complementi de' ſeni di quegli archi, che o a deſtra, o a ſiniſtra ſi trovano lontani da' due punti ſolſtiziali. Così ſe in un dato tempo il lunar perigeo ſi trovaſſe a ſegni III gradi 20. dell' Ariete, allora eſſo ſarebbe diſcoſto gradi 20 dal o del Cancro. Il ſuo complemento ſarà dunque di gradi 70. Onde facciaſi, come il quadrato del ſeno totale al quadrato del ſeno di gradi 70, così il 2″, che è l' equazione maſſima, al quarto termine, che ſarà l' equazione del perigeo lunare,

La ſteſſa equazione ſarà, ſe il perigeo ſe ne ſcoſtaſſe dalla parte oppoſta, come accaderebbe, quando ſi trovaſſe a II ſegni 10°, , poichè allora ſi ſcoſterebbe dal Cancro gradi 26, come dianzi, e così dee ricercarſi l' equazione con gradi 70, come prima. Se tal equazione ſi combina colla nutazione boreale, che è della ſteſſa ſpecie, eſſa ſarà additiva; ma incontrandoſi colla nutazione auſtrale, divien ſottrattiva, come è ſtato già rilevato.

Tali ſono le leggi colle quali è ſtata calcolata la colonna IV della nuova Tavola, notando in eſſa ſolamente il valore dell' equazione del perigeo. La ſpecie di additiva, o ſottrattiva dipende dalle due ſuſſeguenti colonne, cioè V, e VI: nella V vien regiſtrata la longitudine del nodo aſcendente lunare,

nare, che è la medesima della Tavola del 1775, ed aggiungendovi 90°, deducesi la nutazione. Nella sesta poi si colloca la longitudine del lunar perigeo.

Paragonando insieme le longitudini della colonna V colla giunta di gradi 90 con quella della VI, se esse sono della stessa specie, l' equazione del perigeo si aggiunge all' equazione del nodo, e se sono di specie diversa, si sottrae.

L' ultima colonna, cioè la VII della nuova Tavola, contiene l' obbliquità attuale dell' ecclittica totalmente ridotta, tal quale devesi osservare dagli Astronomi nell' anno che corre. Tutti questi precetti si renderanno più chiari negli esempj, che ne addurrò.

ESEMPIO I

Per l' anno 1775.

Essendo questo l' anno primo della Tavola, in esso noteremo l' obbliquità media corretta di 23°. 28'. 11". 91 cent. colla sottrazione di 6".

L' equazione sottrattiva del nodo è di 8". 45 cent. che va diminuita nella ragione del 100 : 95. Onde essa sarà di 8". 13 centesime. L' apogeo lunare nel Gennajo del 1775 era a 3ˢ. 18°. 12'. Onde il suo perigeo era a 9ˢ. 18°. 12'. Il suo moto fino al 21 Giugno è stato secondo le Tavole di 19°. 9'. Onde il lunar perigeo il dì medesimo era a 10ˢ. 7°. 21'. Cioè esso era ne' segni australi; e trovavasi gradi 37°. 21' distante dal Capricorno. Il complemento era dunque a 54°, 49', il cui seno è di 7949 al raggio di 10000. Onde se facciasi, come il quadrato del seno totale al quadrato di 7949, così 2' al quarto termine, questo ci darà l' equazione del perigeo, che sarà di 1". 26 centesime.

La longitudine del nodo in detto anno era di IV. 27. 41; a cui aggiungendo 3 segni la nutazione trovasi a VII. 27. 41. cioè australe. Onde essendo australe pure il perigeo, la sua equazione sarà additiva.

Onde sarà la nutazione australe per il nodo	8". 13 cent.
Equazione del perigeo	1. 26
Somma la nutazione	9. 39

che va detratta dalla media obbliquità di 23. 28. 11. 91.

Onde verrà l'obbliquità attuale osservabile di . . . . 23°. 28'. 2''. 52 cent.
Essa era nella Tavola del 1775 di 9''. 46. Ma detratti 6'' per la correzione della latitudine, e di più 1''. 26 per il perigeo, e ridotta l'equazione diminuendola, come 100 : 95, ne viene la nuova obbliquità di . . 28. 28. 2. 52 cent.

Esempio II

Per l' anno corrente 1782.

Per paragonare le osservazioni dell' anno corrente al calcolo della nuova Tavola, avremo l'obbliquità media di esso di . . . . 23°. 28'. 15''. 50 cent.
come alla pag. 82 della citata Dissertazione, e detratti 6'', sono 9. 50

In essa l'equazione del nodo è di 9''. 76 cent. che va scemata nella ragione del 100 : 95, come è stato rilevato, perciò essa sarà di 9''. 27 centesime.

Per passare all' equazione del perigeo, la sua longitudine al principio di Gennajo dell' anno corrente era a . . . . VII. 3°. 5'.
Il suo moto sino al 21 Giugno di . . . 19. 9'.

Onde la sua longitudine a dì 21 era . . . VII^s. 22°. 14'.

Si deve cercare il seno di 52°. 14', dal cui quadrato dipende l'equazione del perigeo, che sarà di 1''. 25 centesime. Essendo adunque la nutazione boreale, e la longitudine del perigeo australe, la sua equazione va detratta da 9. 27
1. 25

Onde l'equazione ridotta sarà di . 8. 02,

la quale essendo aggiunta all' obbliquità media . . . . , . 23. 28. 15. 50,

ci palesa l'obbliquità attuale del 1782 di 23. 28. 23. 52
Ma essa è stata da me osservata di . . 23. 28. 24. 31.
Onde la differenza tra 'l calcolo e l'os-

servazione sarà di . . . . 0. 0''. 79 cent.

Colla detrazione solita de' 6'', essa deve registrarsi nella nuova Tavola di 23. 28. 17. 52, che differisce di 1''. 32 dall'obbliquità osservata in Parigi.

Quella della mia prima Tavola di 23°. 28'. 17''. 52 cent. riesce alquanto eccessiva, perchè in essa manca l' equazione del perigeo, e perchè ancora in essa si suppone la semplice nutazione di 10'', e non già di 9'' $\frac{1}{2}$, come nuovamente è stata dimostrata.

ARTICOLO X.

Della maniera di far corrispondere le attuali obbliquità dell' ecclittica osservate in Firenze colle analoghe osservazioni di Parigi.

Fino dalle mie prime osservazioni solstiziali del 1756, il Sig. Ab. la *Caille* mi rese avvisato, che tra le sue e le mie osservazioni sull' obbliquità dell' ecclittica vi era una differenza di 5'' in 6'', come rilevasi da una sua cortesissima lettera scrittami immediatamente dopo l' edizione del mio Gnomone. Avendolo egli letto, e considerato, si compiacque della sua gentile approvazione, come di tutte le osservazioni, e risultati, e soltanto mi accennò, che per far concordare insieme le osservazioni Parigine e Fiorentine bastava detrarre 6'' dalla latitudine Fiorentina, fissata in quel volume di . . . . 43°. 46'. 53''

Se dunque facciasi una tal detrazione, essa resta di 43. 46. 47

Ora se da essa si detraggano . . . 20°. 18' 28''. 69 cent.

resterà l' obbliquità dell' ecclittica dell' anno corrente di . . . . 23°. 28'. 18'',

tralasciando la piccola frazione. Ma è stato già avvertito, che nel solstizio di quest' anno l' obbliquità osservata dal Sig. de la *Lande* con ogni maggior diligenza è stata di . . . . 23°. 28'. 16''.

Onde la differenza di 2'', che resta, è così tenue, che in avvenire le osservazioni Parigine e Fiorentine potranno dirsi concordi.

Ma per le nuove osservazioni, e riflessi fatti dallo stesso chiarissimo Astronomo nel suo quarto volume dell' Astronomia il periodo secolare della diminuzione dell' obbliquità è stato dedotto di 33″ $\frac{1}{7}$, che pochissimo differisce dal mio di 34″. 42 centesime. Dall' uniformità adunque tanto del periodo secolare, quanto dell' epoca dell' obbliquità del corrente anno 1782 ne dovrà nascere una perfetta corrispondenza delle future obbliquità tanto medie, che vere, sì nell' Efemeridi Parigine, che nella mia nuova Tavola. E tal corrispondenza sarebbe ancora maggiore, se nelle annuali obbliquità dell'ecclittica delle future Efemeridi Francesi vi si introducesse l' elemento del lunar perigeo, che può cagionare una nuova discrepanza di 2″, o additivi, o sottrattivi.

Ed affinchè questa terza riduzione apparisca ancora nella mia Tavola, in essa oltre la terza colonna delle obbliquità vere ridotte colle prime due riduzioni, vi ho ancora soggiunta la quarta, in cui è introdotta questa terza riduzione. Dalla terza alla quarta colonna non vi è altro divario, che di soli 6″, che sono stati sottratti dalla terza colonna per la corrispondenza delle osservazioni Parigine, e Fiorentine.

ARTICOLO XI.

Tavole delle nutazioni, e degli elementi, che si suppongono

Essendo stato più precisamente determinato il valore della nutazione colle quattro combinazioni discusse nell' articolo VIII, le nutazioni corrispondenti a' diversi punti del nodo lunare riesciranno alquanto maggiori delle Bradlejane, e minori delle mie, che sono state computate nella Dissertazione I colla figura dell' analemma. Veramente era assai comodo il valore di 10″ ivi adoperato in quella costruzione. Poichè in tale ipotesi le nutazioni venivano a corrispondere a' seni de' complementi in diversi quadranti del nodo lunare ascendente; laddove facendo il raggio di 9″, come il Bradlejo, di 9″. 50 centesime, com' è stato da me dedotto, i seni delle Tavole Trigonometriche non possono più rappresentare le nutazioni senza una correzione.

Vero è, che questa è semplicissima. Poichè dato il seno dell' arco, che corrisponde ad una data posizione del nodo, altro non dee farsi, se non che diminuire lo stesso seno nella ragione del 10 : 9 $\frac{1}{2}$ cosa assai facile. Adunque con tal riduzione è stata formata la Tavola I, nella quale, come ognun vede, le nutazioni sono le medesime ne' segni boreali, e negli australi, colla sola differenza, che esse ne' primi sono additive al polo medio, e ne' secondi sono sottrattive. Indi è, che ne' titoli della Tavola si mettono insieme l' Ariete e la Libra, il Toro e lo Scorpione ecc. Poichè la nutazione è la medesima, ma per l' Ariete è additiva, e per la Libra è sottrattiva. E così dicasi degli altri segni, come leggesi ne' medesimi titoli.

TAVOLA I.

Della nutazione dell' Asse terrestre secondo le diverse longitudini del nodo ascendente lunare, nell' ipotesi, che la semplice nutazione australe, o boreale sia di 9″ ½.

Gradi delle longitudini del nodo lunare.	Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.		Segni Zod.	
	O.	VI.	I.	VII.	II.	VIII.	III.	IX.	IV.	X.	V.	XI.
	Bor.	*Aust.*	*Bor.*	*Aust.*	*Bor.*	*Aust.*	*Aust.*	*Bor.*	*Aust.*	*Bor.*	*Aust.*	*Bor.*
	Nut.		*Nut.*		*Nut.*		*Nut.*		*Nut.*		*Nut.*	
1°.	9″.	498	8″.	141	4″.	607	0″.	161	4″.	892	8″.	303
2	9.	494	8.	056	4.	455	0.	332	5.	035	8.	388
3	9.	487	7.	961	4.	313	0.	504	5.	168	8.	464
4	9.	471	7.	875	4.	161	0.	665	5.	313	8.	531
5	9.	462	7.	780	4.	000	0.	826	5.	443	8.	637
6	9.	443	7.	965	3.	866	0.	988	5.	591	8.	693
7	9.	434	7.	581	3.	705	1.	159	5.	719	8.	740
8	9.	405	7.	486	3.	553	1.	310	5.	842	8.	806
9	9.	376	7.	381	3.	401	1.	482	5.	975	8.	863
10	9.	348	7.	277	3.	249	1.	643	6.	108	8.	910
11	9.	319	7.	163	3.	087	1.	814	6.	232	8.	977
12	9.	291	7.	058	2.	935	1.	976	6.	355	9.	034
13	9.	253	6.	945	2.	764	2.	137	6.	479	9.	082
14	9.	215	6.	830	2.	612	2.	299	6.	593	9.	129
15	9.	177	6.	717	2.	450	2.	450	6.	717	9.	177
16	9.	129	6.	593	2.	299	2.	612	6.	830	9.	215
17	9.	082	6.	479	2.	137	2.	764	7.	945	9.	253
18	9.	034	6.	355	1.	976	2.	935	7.	058	9.	291
19	8.	977	6.	232	1.	814	3.	087	7.	163	9.	319
20	8.	910	6.	108	1.	643	3.	249	7.	277	9.	348
21	8.	863	5.	975	1.	482	3.	401	7.	381	9.	376
22	8.	806	5.	842	1.	310	3.	553	7.	486	9.	405
23	8.	740	5.	719	1.	159	3.	705	7.	581	9.	434
24	8.	693	5.	591	0.	988	3.	866	7.	965	9.	443
25	8.	637	5.	443	0.	826	4.	009	7.	780	9.	462
26	8.	531	5.	313	0.	665	4.	161	7.	875	9.	471
27	8.	464	5.	168	0.	504	4.	313	7.	961	9.	487
28	8.	388	5.	035	0.	332	4.	455	8.	056	9.	494
29	8.	303	4.	892	0.	161	4.	607	8.	141	9.	498
30	8.	227	4.	750	0.	000	4.	750	8.	227	9.	500

Per intelligenza della presente Tavola convien ridursi a memoria, che data la longitudine del nodo ascendente lunare, per trovare nel cerchietto delle nutazioni, ovvero nell' analemma da me descritto nella Dissertazione del 1775, conviene a detta longitudine aggiungere gradi 90, o siano segni III, ed a tal punto, o punti corrisponde l' arco, ed il seno della nutazione cercata. Così per esempio siano dati nella Tavola segni VI, gradi 10 longitudine del nodo lunare colla giunta de' segni tre, avremo segni IX, gradi 10. Onde la linea della nutazione si troverà a gradi 10 dopo il Capricorno, il cui complemento è di gradi 80. Diminuendo il seno di detti gradi nella ragione del 100: 95, rinverrassi la nutazione di 9''. 34 cent., e tal nutazione è australe, perchè trovasi ne' segni australi. Perciò nella Tavola a segni VI, gradi 10. s' incontra la riferita nutazione col titolo di australe, come esser deve.

L' ipotesi, nella quale procede la presente Tavola, si è che la nutazione composta sia di 19'', come rilevasi dalle quattro Combinazioni. E così la nutazione semplice sarà di 9 $\frac{1}{2}$, sicchè il sen totale sarà al seno dell' arco dato, come il 100 al 95. E con tal analogia sono state conteggiate tutte le nutazioni della presente Tavola

Dato che sia il segno, ed il grado, nel quale trovasi il nodo ascendente lunare, altro non dee farsi, che pigliare il segno, o segni nella colonna orizzontale in testa della Tavola, e poi nella prima colonna verticale appuntare il numero de' gradi. Dove le due colonne corrispondenti s' incontreranno insieme, ivi si troverà registrata la nutazione, che si domanda. Così domandisi la nutazione competente a segni V gradi 17. I segni V sono nell' ultima colonna coll' indicazione di *australe*. I gradi 17 s' incontrano nella prima colonna verticale; dove la linea del 17° incontrasi colla linea de' segni VI, si troverà la nutazione di 9''. 25 centesime. E questa sarà la nutazione australe competente alla data longitudine del nodo. Questa disposizione di Tavola mi sembra più semplice di altre simili, giacchè non occorre qui aver l' avvertenza di pigliare ora i seni degli archi, ora i seni de' loro complementi. In questa Tavola tutto è racchiuso, senza fare una tal distinzione.

Essendo uguali le nutazioni australi, o boreali ne' punti corrispondenti, esse nutazioni nella Tavola ricorrono due volte, e ciò appunto porta il vantaggio di non dover badare a' complementi, o a' seni diretti.

Non mi son curato di calcolare le nutazioni più minutamente, che a gradi, perchè colle proporzionali tra un grado all' altro si giunge a tutta l' esattezza, che mai in tal materia desiderasi.

Che se io nelle frazioni delle nutazioni non solo ho riguardato le parti centesime, ma vi ho ancora aggiunte le millesime, questo è stato appunto per ottenere le parti proporzionali con tutta la precisione. Sono state pur necessarie le parti millesime per distinguere le nutazioni de' primi, e degli ultimi gradi del quadrante, le quali differiscono meno di una centesima, e perciò senza le parti millesime sarebbero tornate uguali tra di loro. Il che non può stare.

Questa adunque sarà la Tavola I, per ottenere le nutazioni corrispondenti alle diverse longitudini del nodo ascendente lunare, senza la riduzione già accennata del perigeo lunare, il quale nelle minori distanze lunari aumenta le nutazioni, e nelle maggiori le diminuisce di una maniera, che a me sembra sensibile.

Volendo poi introdurne l' elemento del lunar perigeo, la cui azione non è affatto insensibile, ma fa variare la nutazione almeno di 2″ per parte, cioè sì dalla parte boreale, che dall' australe, alla prima Tavola sarà bene di aggiungere la seconda, per l' equazione propria del detto perigeo.

La massima equazione, tanto boreale, che australe si suppone di 2″, benchè essa possa farsi qualche cosa di più. Nondimeno essendo piccola la frazione, ho giudicato di tralasciarla, e ciò tanto più, quantochè le azioni momentanee lunari vanno riportate al centro de' momenti, tanto nel semidiametro superiore dell' equatore, quanto nell' inferiore. Questi due centri sono tra loro lontani un semidiametro, ed $\frac{1}{7}$ di esso. Il che fa diminuire l' azion lunare rispetto a quella, che fosse riferita a' due punti estremi del diametro dell' equatore. Comunque siasi, io stimo, che l' equazione massima del perigeo possa essere assai prossima a 2″, e così la suppongo nella Tavola. In essa ancora le diverse equazioni sono le medesime

medesime per i segni boreali, ed australi del lunar perigeo, e soltanto occorre la differenza de' segni; poichè se la nutazione, ed il perigeo si trovano ne' segni della medesima specie, cioè amendue boreali, o amendue australi, l'equazione sarà additiva. Ma trovandosi la nutazione, ed il perigeo ne' segni di diversa specie, cioè uno ne' segni boreali, e l' altro negli australi, ovvero al contrario, allora l' equazione del perigeo sarà sottrattiva dalla nutazione o boreale, od australe.

Ancora nella presente Tavola dobbiamo prima determinare il seno del cerchio, che corrisponde alla pressione del perigeo, e poi diminuire tal seno nella ragione del 10 : 2; così sarà

TAVOLA II.

Dell' equazione delle nutazioni per l' elemento del lunar perigeo, supponendo l' equazione massima di 2 secondi.

Segni O, e VI. Gradi.	Equazione del perigeo Min″. Mill.	I. e VII. Equazione Min″. Mill.	II. e VIII. Equazione Min″. Mill.	III. e IX. Equazione Min″. Mill.	IV. e X. Equazione Min″. Mill.	V. e XI. Equazione Min″. Mill.
0.	0″. 000					
1	0. 001	0. 530	1. 530	2. 000	1. 500	0. 499
2	0. 002	0. 561	1. 559	1. 999	1. 469	0. 470
3	0. 005	0. 593	1. 587	1. 997	1. 438	0. 440
4	0. 009	0. 625	1. 615	1. 994	1. 406	0. 412
5	0. 015	0. 657	1. 642	1. 990	1. 374	0. 384
6	0. 021	0. 690	1. 669	1. 984	1. 341	0. 357
7	0. 029	0. 724	1. 695	1. 978	1. 309	0. 330
8	0. 038	0. 757	1. 719	1. 970	1. 275	0. 305
9	0. 048	0. 791	1. 743	1. 961	1. 242	0. 280
10	0. 058	0. 826	1. 765	1. 951	1. 208	0. 256
11	0. 072	0. 860	1. 787	1. 939	1. 173	0. 233
12	0. 090	0. 895	1. 809	1. 927	1. 139	0. 211
13	0. 110	0. 929	1. 828	1. 913	1. 104	0. 190
14	0. 117	0. 964	1. 848	1. 896	1. 070	0. 170
15	0. 134	0. 999	1. 870	1. 883	1. 034	0. 151
16	0. 151	1. 034	1. 883	1. 870	0. 999	0. 134
17	0. 170	1. 070	1. 896	1. 848	0. 964	0. 117
18	0. 190	1. 104	1. 913	1. 828	0. 929	0. 110
19	0. 211	1. 139	1. 927	1. 809	0. 895	0. 090
20	0. 233	1. 173	1. 939	1. 787	0. 860	2. 072
21	0. 256	1. 208	1. 951	1. 765	0. 826	0. 058
22	0. 280	1. 242	1. 961	1. 743	0. 791	0. 048
23	0. 305	1. 275	1. 970	1. 719	0. 757	0. 038
24	0. 330	1. 309	1. 978	1. 695	0. 724	0. 029
25	0. 357	1. 341	1. 984	1. 669	0. 690	0. 021
26	0. 384	1. 374	1. 990	1. 642	0. 657	0. 015
27	0. 412	1. 406	1. 994	1. 615	0. 625	0. 009
28	0. 440	1. 438	1. 997	1. 587	0. 593	0. 005
29	0. 470	1. 469	1. 999	1. 559	0. 561	0. 002
30	0. 499	1. 500	2. 000	1. 530	0. 530	0. 001

La maniera di servirsi di questa Tavola è stata già accennata all' art. IX.

Nondimeno per facilità maggiore, soggiungerò, che all' equazioni di questa Tavola non ho aggiunta la circostanza di australe, o boreale, perchè essa desumesi da' medesimi segni notati in fronte della Tavola, giacchè dal segno O sino a VI, cioè dal principio di Ariete sino al principio della Libra, i segni sono boreali, e perciò boreale pur sarà l'equazione del perigeo. Ed al contrario dal segno VI al XII il perigeo si troverà dalla parte australe, e così pur sarà l' equazione del medesimo.

Quando poi questa equazione sia additiva, o sottrattiva dalla prima, cioè dalla nutazione del nodo, non può conoscersi dalla Tavola, ma combinando insieme la specie delle due equazioni; se esse siano amendue della stessa specie, cioè amendue australi, o amendue boreali, allora sarà segno, che l'equazione del perigeo sarà additiva all' equazione del nodo: e quando al contrario la prima nutazione sia ne' segni diversi dalla seconda, allora sarà indizio, che l'equazione del perigeo sarà sottrattiva a quella del nodo, cioè alla prima, e principal nutazione.

Quando poi tal nutazione sarà corretta coll'equazione o additiva o sottrattiva del perigeo, allora essa così corretta deve o aggiungersi, o sottrarsi dall'obbliquità media dell' ecclittica. Bisogna adunque attentamente considerare, che l' equazione del perigeo è fatta per ridurre quella del nodo, ma questa così ridotta deve avere i soliti titoli di additiva, o sottrattiva della media obbliquità. Si sa, che è additiva, quando la prima nutazione cade ne' segni boreali, e che è sottrattiva, quando essa trovasi ne' segni australi.

Ancora in questa equazione vi ho computate le parti millesime, non perchè possa giungersi a tanta sottigliezza, ma per poter distinguere le equazioni de' gradi prossimi a segni III, e IX, i quali gradi senza le millesime sarebbero di 1. 99 dal primo grado sino al quinto.

Suppongo in questa Tavola la massima equazione di 2″, tanto australe, che boreale. Onde nella lor somma sarebbe un divario di 4″ dalla massima alla minima distanza lunare. E' stato già avvertito, ma qui convien rammentarlo, che in re-

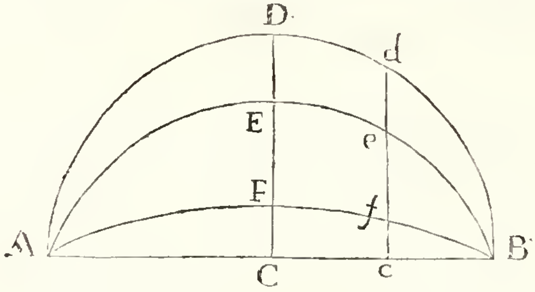
altà il calcolo somministra una frazione di più. Essa però è stata tralasciata per non esser considerabile. Vi sarà sempre modo di meglio rettificare tal massima equazione.

Intanto però con essa si spiegano alcune differenze che si osservano nelle stelle fisse, alcune delle quali non si soggettano accuratamente alle leggi della prima nutazione.

Inoltre non lascierò di avvertire, che le equazioni son calcolate col Teorema della ragion duplicata de' seni delle longitudini del perigeo, e non già nella ragion semplice, perchè così è dimostrato in un particolar Teorema.

Se ho scelto piuttosto il perigeo, che l'apogeo, ciò ho fatto per avere sempre più in vista la cagione degl' incrementi della nutazione. Vero è che poteva ancora adoperarsi l' apogeo lunare, mutando i titoli delle addizioni, o sottrazioni.

Merita ancora, che si aggiunga per facilità delle due Tavole, che esse potrebbono formarsi con una semplicissima costruzione. Poichè sia, nella figura, *ADB* un mezzo cerchio, il



qual sia descritto con un raggio di pollici 6.

Col semidiametro *CD*, e colla proporzione, che passa tra 10, e $9\frac{1}{2}$ si trovi la quarta proporzionale *CE*, e collo stesso semiasse maggiore *CB*, e minore *CE* descrivasi l' ellissi *AEeB*.

Similmente facciasi *CF* = a parti 2 del raggio *CD* supposto di parti 10, e col semiasse minore *CF* descrivasi la seconda ellissi *AFfB*, dico, che la prima ellissi sarà la scala delle nutazioni, e la seconda sarà la scala delle equazioni del perigeo lunare.

Poichè sia per il nodo lunare il punto *d* lontano gradi 90

dallo ſteſſo nodo. Per la natura dell' elliſſi ſarà *DC* : *FC* = *dc* : *fc*. Onde la *ec* ſarà uguale al valore della nutazione per il nodo lunare.

Per la ſteſſa ragione ſarà *DC* : *FC* = *dc* : *fc*. Onde ſarà *fc* l' equazione del perigeo. Più eſattamente ſarà *fc* quadrato.

Eſſendo adunque il raggio del mezzo cerchio di pollici 6, le ſemiordinate *ec*, *fc* ſaranno di tal grandezza, che potranno determinarſi con preciſione, non ſolo i ſecondi della nutazione, ed equazione del perigeo, ma eziandio le loro parti decime, ed ancora venteſime, che è baſtantiſſimo per l' uſo Aſtronomico di quelle due ſemiordinate. Ma volendole conteggiare col calcolo, ſi otterranno le parti centeſime, e le milleſime, quando occorreſſe.

Oltrepaſſerò ora alla terza Tavola degli elementi, la quale agli Aſtronomi ſpeſſo occorrerà. E' ſtata già una ſimil Tavola calcolata nel Coroll. IV. Prop. XV. dell' Art. III, ma allora in eſſa ſupponevaſi la nutazione totale di 20″, la quale ora con più combinazioni eſſendo ſtata ridotta a - - - - 19″ ſi modificano diverſamente tutti quegli elementi, e perciò conviene riconteggiarli ſecondo la più certa, e più preciſa nutazione. Formato adunque il calcolo ſarà

TAVOLA III.

Degli elementi della nutazione, e della preceſſione degli equinozj dedotti dalla nutazione totale di 19″.

	Min. Secon.	Cent.
I. Che la nutazione auſtrale, o boreale ſia di .	9.	50
II. Che la preceſſione degli equinozj per le ſole forze ſolari ſia di	16.	09
III. Che la preceſſione relativa alle ſole forze lunari ſia di	34.	24
IV. Che le forze compoſte fanno la media preceſſione degli equinozj di	50.	33
V. Che la minima preceſſione ſia di	40.	83
VI. Che la maſſima ſia	59.	83
VII. Che la proporzione delle forze lunari alle ſolari ſia come	34 :	16

prossimamente, ovvero, come 342 : 160, come certamente la mostrano molti fenomeni delle maree, e come si suppone da più Autori.

Veggasi su tal proporzione la mia Dissertazione latina *De maris æstu* stampata in Firenze l' anno 1755.

Detta proporzione in centesime riducesi, come 100 : 46, cioè come 5 : 2 $\frac{1}{5}$. Ora vi sono degli Autori, che la fanno di $\frac{2}{5}$, come è stato avvertito. Non par verisimile l' opinione di quegli Autori, che fanno salir le forze solari a 22″. e 28″. Poichè o si supponga la nutazione del Bradlejo, o la mia, tali forze non arrivano a 17″. M. *Simpson* la fa di 18″.

Ma supponendo le forze perturbatrici solari di 22″. togliendole dalla media precessione di 50″. 33 cent., resterebbono le forze lunari di 28″. 33, e perciò sarebbono le forze solari ridotte alle parti centesime delle lunari di 78 centesime, cioè le forze solari tornerebbero pressochè $\frac{4}{5}$ delle lunari. Ora un tal risultato è assolutamente contrario a' fenomeni delle maree osservate nelle Zizigie, e nelle quadrature, secondo i quali non si allontana la forza solare da $\frac{2}{5}$ della lunare. E così quella, che si calcola dall' ipotesi di 22″, è doppia della vera, e perciò detta ipotesi non può in alcun conto sostenersi.

Le sottilissime osservazioni di *Bradlejo* son tali, che la nutazione non può discostarsi da 18″, se non che di 1″, o al più 2″, senza far violenza alle medesime,

Le mie numerose osservazioni solstiziali de' quattro anni citati, cioè 1756, 1764, 1775, e 1782 sono di tal natura, che il loro risultato per le quattro combinazioni calcolate non può discostarsi dal vero, che di 1″, ed a mio credere, ancor meno, cioè di $\frac{1}{2}$ secondo. Ora per far tornare le forze perturbatrici solari di 22″, converrebbe ridurre la nutazione a soli 15″, che troppo discordano dalla nutazione Bradlejana di 18″, e dalla mia di 19″. Per la qual cosa si terranno gli elementi della mia Tavola III. come prossimamente veri, mettendosi con essi un accordo tra le osservazioni Bradlejane, tra le mie, tra' fenomeni delle maree, e tra le nutazioni dell' asse terrestre immediatamente osservate.

ARTICOLO XII.

Della teoria della densità de' pianeti in ordine al periodo secolare dell' obbliquità dell' ecclittica.

Con tutte le lunghissime osservazioni fatte sul periodo delle obbliquità dell' ecclittica, per le quali esso deducesi molto minore della comune opinione, vi sono nondimeno degli Astronomi, che sempre oppongono il valore di quel periodo, che è fondato sulla teoria delle forze de' pianeti, che son quelle, che facendo retrocedere il nodo tendono a diminuire l' obbliquità. E perchè appresso di essi più vale la forza della teoria, che la precisione, il consenso, ed il merito di tante osservazioni, convien finalmente esaminare, se realmente la teoria sia così fondata da attenderne tutta la possibil certezza in confronto ancora di osservazioni certissime. Dipende tal teoria principalmente dalla densità de' pianeti, che è quella che accresce, o scema le forze per far retrocedere il nodo dell' orbita terrestre. Tal densità in que' pianeti, che son circondati da' satelliti, deducesi dalle distanze, e tempi periodici degli stessi satelliti. Così noi la deduciamo nel globo terrestre, in Giove, ed in Saturno, i cui satelliti ci assicurano della loro gravità. Ma non avendo alcun satellite Marte, Venere, e Mercurio, noi non sappiamo, qual sia la lor densità. Si è adunque supposto, che la densità de' pianeti primarj sia in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici, e ciò perchè rilevasi che la densità della Terra è maggiore di quella di Giove, e questa è maggiore della densità di Saturno. Indi è, che si è immaginato l' esposto Teorema. Ma siccome tal Teorema include ancora la proporzione delle densità, merita di essere esaminato, se tal proporzione regna realmente ne' corpi planetarj, e se dalle ipotesi alle vere densità vi sia discrepanza notabile, per assicurarsi del Teorema. Non è difficile un tal esame, avendo noi tre pianeti, le cui densità ci son note *aliunde*, e senza la esposta teoria esse si deducono dimostrativamente da' loro satelliti. Indi è, che tenendo ferme le tre densità della Terra, di Giove, e di Saturno potremo mettere a prova l' ipotesi, osservando, se le densità dedotte coll' ipotesi siano almeno prossime alle vere densità, che son quelle calcolate coll' uso de' satelliti.

Di tre pianeti si possono esaminare tre combinazioni. Cioè della Terra con Giove, della Terra con Saturno, e di Saturno con Giove. Le densità di tali pianeti io le suppongo quali sono state dedotte, e calcolate dal Sig. de la *Lande* colla parallassi solare ritrovata di 8″. 60 coll' ultimo passaggio di Venere nel 1769. E benchè vi siano degli Astronomi, che aumentino un poco più la parallassi solare, sino a 8″. 80, pure un tale aumento non porta alcun sensibile divario nella presente ricerca.

PRIMA COMBINAZIONE

Della Terra con Giove.

Moto periodico della Terra, giorni 365, ore 6, cioè 365. 25 centesime, la cui radice quadrata è di parti 19, 11 cent.

Moto periodico di Giove giorni 4332. 50 cent.

Radice quadrata sarà prossimamente di 65. 82 cent.

Onde facciasi, come 65.82 : 19.11 = 1, che è la densità della Terra al quarto termine, che sarà la densità di Giove per l'ipotesi Euleriana. E tal densità, fatta la divisione, torna di 0. 2903. Or la densità di Giove, che si calcola dipendentemente da' suoi satelliti, si fa comunemente di 0. 2298, come nella *Connoissance des temps*, ed altri volumi. Questa è assai prossima a 0. 23. Indi è, che la vera densità a quella dedotta coll' ipotesi Euleriana sta, come il 23 : 29, che è una differenza non disprezzabile, giacchè essendo essa di parti 5, rispetto alle parti 23, trovasi tra la parte quarta e la quinta.

SECONDA COMBINAZIONE

Della Terra con Saturno.

Il moto periodico di Saturno è di giorni 10579. 25, la cui radice quadra è di parti 102. 85. Onde facciasi, come 102. 85: 19.11 = 1 al quarto, che sarà la densità di Saturno di 0. 1858. Tal densità per mezzo de' suoi satelliti si fa ordinariamente di 0. 1045. Onde la differenza della densità vera di Saturno dalla calcolata per l' ipotesi Euleriana è di

è di 0. 0813. Cioè sta la prima densità alla seconda, come il 18: 10, con discrepanza assai palpabile. Merita di essere avvertito, che tanto nella prima Combinazione, che nella seconda la densità dell' ipotesi torna molto maggiore della vera, e nella seconda Combinazione sopra parti 10 vi sono otto parti di eccesso. Se questo medesimo eccesso succeda nella densità di Venere, essa per ridurla alla vera dovrebbe diminuirsi nella ragione del 18: 10, ed allora tal densità ridotta sarebbe assai prossima a quella, che esiggerebbe il periodo secolare dell' ecclittica di 34″, e la teoria sarebbe d' accordo colle osservazioni.

TERZA COMBINAZIONE

Di Saturno con Giove.

Benchè questa terza Combinazione di Saturno con Giove deducasi dalle due prime, con tutto ciò sarà bene calcolarla separatamente per palesar sempre più la discrepanza dell' ipotesi dalle vere densità de' pianeti.

Adunque è stata dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Saturno, che è di parti 102. 85.

E' stata pur dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Giove, che è di parti simili 65. 82. Onde a seconda dell' ipotesi si faccia

Come 182. 85 : 65. 82 = così la densità di Giove dedotta da' moti periodici de' suoi satelliti, la quale si fa di parti 2298, al quarto termine, il quale ci si paleserà di parti 1470, ovvero avendo riguardo alla densità della Terra, che si suppone = 1, sarà di 0. 1470. Ma la densità del medesimo pianeta dedotta dal tempo periodico de' suoi satelliti, cioè la sua vera densità è di 0. 1045. Onde deducesi in numeri semplici, che la densità ipotetica alla vera sia come il 14 : 10 prossimamente, cioè la densità dell' ipotesi eccede la vera di 4 parti decime della medesima, discrepanza che fa vedere la fallità dell' ipotesi

Se poi al contrario dalla densità vera di Saturno vogliasi coll' uso dell' ipotesi dedurne quella di Giove, allora si farà, come 65. 82: 102. 85 = 1045 al quarto termine, che ci si paleserà di parti 1629.

Ma in realtà per il moto de' satelliti di Giove la sua densità è dimostrata di 2298. Onde tra la vera densità di Giove e quella che si calcola coll' ipotesi vi è la differenza di 0. 669, che paragonata alla vera densità è più, che la parte quarta della medesima, ed ancor questa differenza è considerabile

Indi è, che per queste combinazioni l' ipotesi delle densità in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici è così discrepante dalla verità, cioè dal paragone de' tre pianeti, che avendo satelliti, ci fanno conoscere la vera loro densità, che non solamente non può dirsi prossima alla vera, ma dee dirsi lontanissima, e perciò incapace di essere adoperata per le densità degli altri tre pianeti, che sono privi di satelliti, cioè di Mercurio, di Venere, e di Marte.

Dalla quantità del periodo secolare dell' ecclittica, insieme cogli altri elementi del Problema, potremo dedurne la vera densità di Venere, benchè priva di satelliti. Ma prima veggiamo qual sarebbe la sua densità dedotta da quella di Saturno, di Giove, e della Terra.

Se si assume la densità, e tempo periodico di Saturno per rilevarne la densità di Venere, essa viene più piccola, che non si suppone da' moderni Astronomi.

Il moto periodico di Venere è di giorni 226, ore 17 prossimamente, e riducendo le ore alle parti centesime sarà giorni 224 . 71 centesima prossimamente. Estraendone la radice, questa tornerà di parti 14. 99, cioè assai prossimamente 15. 00.

La radice del tempo periodico di Saturno è 102. 85, e la sua densità vera di 1045. Onde facciasi

Come 1500 : 10285 = 1045 al quarto termine, che sarà di parti 7165, cioè . . . . 0, 7165.
Ma dagli Astronomi tal densità si fa di. . . . 1. 2750.
Onde la differenza è . . . . 0. 5505.

Indi è, che la densità di Venere dedotta ancora coll' ipotesi, ma applicata alla vera densità di Saturno, vien tanto minore di quella, che gli Astronomi adoperano ne' loro elementi, che non si sa, come possa adoperarsi. Onde deducasi dalla densità di Giove, e facciasi, come

15 . 00 : 65 . 82 = 2298 al quarto, che sarà 10085. E questa densità pure è minore di 1. 2750, che si segue dagli Astronomi.

Deducasi finalmente la stessa densità dalla densità della Terra, e perciò dovrà farsi

Come 15.00 : 19.11 = 1000 al quarto. E questo sarà di 1274, e confronta benissimo col calcolo de' moderni, che è di 1275. Il divario di 1 parte sarà cagionato dalle frazioni.

Non si vede per altro per qual ragione detti Astronomi invece di assumere per base del loro calcolo la vera densità di Giove, o di Saturno dedotta da' loro satelliti (come la densità della Terra è stata dedotta dalla Luna) si siano solamente contentati di argomentarla dalla densità terrestre.

Se l' ipotesi della ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici dee sussistere in tutto il nostro sistema circumsolare, cioè in tutti sei i pianeti primarj, perchè non considerare la densità di Giove, e di Saturno, per dedurne la densità di Venere, e soltanto prevalersi della densità terrestre?

Deducendosi adunque conseguenze sì disparate nella densità di Venere, cioè deducendosi essa coll' elemento della terrestre densità supposta come 1. di parti 1. 2740
deducendosi per la densità di Giove di 1. 0085
deducendosi colla densità di Saturno di 0. 7165

per qual ragione di questi tre numeri si presceglie solamente il primo, e gli altri si trascurano?

Potrò io col medesimo diritto, insistendo ancor sull' ipotesi erronea, prevalermi del terzo numero, invece del primo; ed allora supponendo, che colla densità di Venere di parti 1. 2740 si deduca co' soliti Problemi il periodo secolare di 47″, potrò abbassar detto periodo nella ragione del 1274: 716. Onde facendo come 1274: 716, così 47″ al quarto termine, questo verrà di 26″. 41 centesima. Sicchè colla stessa ipotesi, ma con assumere per elemento la vera densità di Saturno, il periodo secolare in vece di 47″ tornerà 26″. 41, cioè meno del mio periodo.

E se si assuma la densità di Giove, e si faccia, come 12740: 1008 = 47″ al quarto, esso ci tornerà di 37″, cioè poco più del mio periodo, che è prossimo a 35″. Ecco adunque, che coll' istessa ipotesi delle densità reciprocamente proporzionali alle radici de' tempi periodici si deduce quel periodo, che si vuole, cioè o di 47″, o di 27″, o di 37″, secondo la diversa scelta dell' elemento del calcolo relativo alla densità de' pianeti forniti di satelliti.

Nella mia Memoria del 1764 io ho calcolato, che la densità di Venere assunta dall'Eulero alla densità del mio nuovo calcolo sta, come il 533 a 208. Onde essendo la detta densità nell'ipotesi, che la terrestre sia = 1, di parti 1. 2740, facciasi come 533 : 208 = 1274 al quarto, questo sarà di parti 0. 4784

Ora essendomi pervenuto il Tomo IV dell' Astronomia del chiarissimo M. de la *Lande*, osservo con mio sommo piacere, che egli avendo ridotto il periodo della diminuzion secolare dell' ecclittica a 33″ e 3 decime, ed avendo ricalcolato secondo tal elemento la densità di Venere, la ritrova di 0. 4971, con particolare uniformità al mio calcolo del 1764. Ma aggiungasi, che allora era stata da me adoperata la variazione secolare dell' ecclittica di 29″, e con essa è tessuto tutto il calcolo, il quale ora riducendolo colla diminuzione secolare dell' ecclittica di 34″, detta densità sarà alquanto aumentata. Ma convien ripigliare tutto questo calcolo cogli elementi di questa Memoria, cioè colla nuova proporzione tra le forze lunari, e solari rispetto alla precessione degli equinozj, colla nutazione trovata di 19. 05 cent., colla parallassi solare di 8″. 80 centesime, ed altri elementi.

Ritessendo adunque tutto questo calcolo risulta assai prossimamente la densità di Venere di 0. 5000, che è la metà della terrestre densità, e che così bene si accorda con 0. 4971, densità altrimente calcolata dal citato Astronomo.

Dobbiamo adunque concludere, che come non vi è nell' universo una legge, colla quale siano regolati i diametri, i volumi, le masse de' pianeti da Mercurio fino a Saturno; così dee dirsi, che neppure vi sia legge alcuna nelle densità, le quali non dipendono da' tempi periodici, o dalle loro radici, ma dipendono dalle diverse materie, colle quali i pianeti sono stati fabbricati. Se le densità dovessero avere un rapporto col calor solare, dovendosi questo desumere dall' intensità della luce, che va ad illuminare, e riscaldare i diversi pianeti, dovrebbono tali densità osservarsi in ragion reciproca duplicata delle distanze, e ciò secondo la legge dell' intensità della luce, che appunto si regola con quella ragione. Ma noi siamo ben lontani ancora da tal legge, non meno che dalla ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici.

Indi è, che non dobbiamo cercare alcun rapporto tra le distanze e le denſità, tra' tempi periodici e le ſteſſe denſità, ma dobbiamo penſare, che eſſendo i pianeti ſtati formati con materie di differente ſpecifica gravità, la loro denſità non abbia altra legge, che quella delle materie della prima formazione.

Co' ſatelliti di Saturno, di Giove, e della Terra ſapremo la loro denſità. Colle oſſervazioni del periodo dell' obbliquità dell' ecclittica dedurremo la denſità di Venere. Ma per Marte, e per Mercurio, non pare che vi ſia modo di determinarla.

Dal preſente eſame ſull' ipoteſi comunemente ricevuta dobbiamo argomentare, che eſſa non ha alcuna forza; che è aſſolutamente falſa; e che male alcuni Autori hanno dubitato delle lunghiſſime oſſervazioni ſull' obbliquità dell' ecclittica, perchè eſſe non ſono uniformi a quella teoria. Non poſſono mai eſſerlo, perchè la ſteſſa teoria è diſcordante da sè medeſima, ed è contraria alle più certe denſità de' tre pianeti forniti di ſatelliti.

Mi ſi dirà, che eſſendo la denſità di Venere quaſi la metà della terreſtre, ed eſſendo queſta minore di quella di Giove, e di Saturno, non ſi ſcorge nel ſiſtema elementario quell'armonia, quella perſetta corriſpondenza delle parti, che è tanto propria dell' onnipotente Fabbricator del ſiſtema. Poichè tal denſità da Venere alla Terra creſce, e dalla Terra a Giove e Saturno va ſempre ſcemando. Ma chi è mai tra gli uomini, che poſſa a profondo penetrare le vaſtiſſime mire del ſupremo Architetto della natura?

Chi ſa, che nella fabbrica del noſtro ſiſtema circumſolare il ſommo Arteſice coll'accreſcere la terreſtre denſità, ed in conſeguenza la gravità, non abbia penſato a ritener così più fortemente la noſtra Luna nella ſua orbita, e diminuire quelle irregolarità, che pur troppo tormentano gl' ingegni degli Aſtronomi, quantunque eſſe ſiano minori, che non ſarebbono con una minor denſità? Chi ſa, che non vi ſiano altri oggetti degni del ſupremo Architetto, i quali eſiggano tal denſità maggiore di tutte le altre?

Contentiamoci di ſapere quali ſiano le vere denſità in que' pianeti, che ce ne danno un ſicuro argomento, e di rile-

vare indi le conseguenze, che nascono a tenor dell' universal gravità.

Articolo XIII.

Risposta agli Autori delle Efemeridi Milanesi sullo Gnomone Fiorentino.

Gli Autori delle Efemeridi Milanesi dell' anno 1779 nell' articolo dell' obbliquità dell' ecclittica ragionano intorno al periodo secolare della medesima, e dopo aver riferite le opinioni di diversi Astronomi, che l' hanno creduto di 88″, di 60″, di 47″, di 45″, riportano il mio periodo, dedotto prima dalle osservazioni solstiziali del 1756 allo Gnomone della Cattedrale, e poi riconfermato, e ridotto colle simili osservazioni del 1775, per le quali torna di 34″. 42 centesime. Sul proposito delle mie osservazioni essi asseriscono che *nec comparationum numero, nec instrumenti natura, sic coeteris præstare videntur, ut rem prorsus definire censeantur* ecc.

Alquanto diversa però è stata l' idea de' più insigni Astronomi, che cogli occhi proprj hanno potuto osservare la grandezza, la precisione, l' opportunità locale di questo vasto Gnomone.

Il Sig. de la *Condamine* fu quello, che lo giudicò di così grande importanza, che ne proccurò gli ordini Sovrani per ristorarlo.

Il Sig. *Bernoulli*, che si trovò a più osservazioni, ne commendò pubblicamente il suo pregio, chiamandolo un istrumento singolare in tal genere.

Il Sig. de la *Lande* ne prese così alta idea, che ricevendo poi successivamente le mie osservazioni solstiziali, cambiò la sua opinione intorno al periodo secolare dell' obbliquità, riducendolo a 33″. 3 decime, come potrà consultarsi nel suo Tomo IV dell' Astronomia, segno assai chiaro, che egli le ha giudicate decisive.

Tralasciando i giudizj di altri Astronomi, che parte colla locale ispezione, e parte colla considerazione delle osservazioni da me pubblicate si sono assicurati della verità, mi farò lecito di avvertire, che le due ragioni riportate dagli Astronomi Milanesi vanno maturamente esaminate.

Toccano essi il piccol numero delle combinazioni, e la natura di questo istrumento.

Va esaminata la prima eccezione, giacchè le obbliquità da me in diversi anni concluse si appoggiano a gran numero di osservazioni.

Quella dedotta nel 1775 è fondata sopra	XV	osservazioni
Quella del 1756 sopra	XVI (*a*)	
Quella del 1764 sopra	V	
Quella del 1775 sopra	XVI (*b*)	
Quella del 1782 sopra	XVI.	

Se poi detti Astronomi intendono di ragionare delle combinazioni colle antiche osservazioni, certo è, che l' osservazione fondamentale del 1510 è una sola, ma essa è combinata con più e più moderne osservazioni. Essa è così ben rappresentata dal marmo solstiziale di quell' anno, che non può esservi error sensibile

Essa finalmente è riportata ad un lungo periodo di anni 272, rispetto all' anno corrente, e tal periodo fa svanire qualunque piccolo errore, che potesse concepirsi nella posizione del marmo solstiziale.

Sulla natura dell' istrumento i due Professori cambierebbono d' opinione, se fossero sul luogo, come gli altri Astronomi già citati. Poichè l' altezza dello Gnomone è di piedi Parigini 277.

Con tal altezza si combina una tal precisione dell' immagine solare, che negli appulsi dell' orlo boreale, ed australe non può errarsi di una linea, che in questa vastità di raggio non porta error sensibile.

Contribuisce a tal esatta terminazione la rispettiva piccolezza del foro centrale, e l' oscurità di quel vastissimo tempio. In somma trattandosi di tali istrumenti, bisogna prima vedere, e poi giudicare.

Tralascio le considerazioni delle moderne combinazioni, le quali, benchè ristrette ad anni 26, come lo sono quelle del 1756, paragonate a quelle del 1782, ovvero ad anni 20,

---

(*a*) Veggasi il mio Volume del vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino, stampato in Firenze nel 1757.

(*b*) Veggasi la Dissertazione Astronomica del 1776.

come quelle del 1755 a quelle del 1775; contuttociò esse decidono, che il periodo secolare non può mai essere della grandezza finora giudicata dagli Astronomi, ma di un valore molto minore. E se con esse sole non può prescriversi la frazione, si comprende nondimeno, che il periodo è poco più di 30″. Che se a tali moderne combinazioni si aggiunga la combinazione fondamentale del 1510 colle moderne osservazioni, si stabilisce ancora con precisione maggiore il periodo di 34″, come nella citata Dissertazione.

I calcoli, che si accennano di M. de la *Grange*, dell' *Eulero*, e di altri eccellenti Matematici, non sono mai da preferirsi alle più certe osservazioni, essendo essi fondati sopra ipotesi incerte, qual' è quella della densità de' pianeti, che son privi di satelliti, di cui in conseguenza ignoriamo la densità. Venere è uno di tali pianeti, che moltissimo influisce nella teoria fisica della obbliquità. Meglio adunque sarà il rovesciare il Problema, ed invece di calcolare il moto dell' obbliquità dalle densità ipotetiche de' pianeti, dedurre piuttosto la densità dalle osservazioni certissime del moto progressivo della stessa obbliquità. Allora la densità di Venere tornerà meno della metà di quella, cha viene in conseguenza dalle ipotesi Euleriane, come ho fatto vedere in una mia Dissertazione composta nel 1764, che è inedita.

Co' nuovi elementi dedotti dalle combinazioni della presente Memoria un tal calcolo va perfezionato, e ridotto. Sempre però la densità di Venere torna la metà incirca rispetto a quella, che deducesi dall' ipotesi Euleriana delle densità in ragion reciproca sudduplicata de' tempi periodici. E questa ipotesi se si esamina col rapporto delle densità de' tre pianeti, le quali ci son note per i satelliti, che essi godono, cioè della Terra, di Giove, e di Saturno, non solamente dee dirsi dubbiosa, ma notabilmente aberrante rispetto alle densità verificate coll' elemento de' satelliti, come è stato provato nell' articolo antecedente.

Ma serve per ora di persuaderci, che quell' ipotesi va meglio esaminata, e corretta, e che in vigore de' risultati teorici della medesima non possono revocarsi in dubbio le tante, e così certe osservazioni del periodo secolare, che è molto minore, che non esiggerebbe quell' ipotesi.

OSSERVAZIONE

OSSERVAZIONE

DELLA CONGIUNZIONE INFERIORE DI VENERE COL SOLE

A dì 20 Marzo 1782

CON ALCUNE RIFLESSIONI

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Astronomo all' Osservatorio di Milano.

E' Noto, che le osservazioni delle opposizioni col Sole ne' pianeti superiori, e ne' pianeti inferiori quelle delle loro congiunzioni col Sole medesimo sono particolarmente pregiate dagli Astronomi, come le più opportune ed interessanti, per le utili conseguenze, che se ne traggono. In tali circostanze la longitudine eliocentrica e la geocentrica sono nella stessa direzione esattamente; e quindi dall' immediato confronto di ciò che si avrebbe pel calcolo delle Tavole, e di ciò che si è avuto in fatti per la via dell' osservazione, si ha un facile mezzo per verificare gli elementi, sopra i quali le Tavole stesse sono costrutte.

Tra le congiunzioni poi le inferiori sono da anteporsi alle superiori, perchè nella più grande vicinanza del Pianeta alla Terra, più grandi comparire ci devono le piccole deviazioni del medesimo, venendo esse osservate sotto l' angolo più vantaggioso. Se si consideri il triangolo *SPT* (*fig.* 1.) formato al Sole, al Pianeta ed alla Terra, nel quale l' angolo in *S* corrisponde alla commutazione, o sia alla differenza delle longitudini eliocentriche del Pianeta e della Terra; l' angolo in *T* alla elongazione, o sia alla differenza delle longitudini geocentriche del Pianeta e del Sole; e se ne prenda l' espressione differenziale, si avrà la ragione delle rispettive variazioni, e sarà $ds : dt :: R : \text{sen.}^2\, t - \text{sen.}\, t \times \text{cos.}\, t \times \text{cot.}\, s :: TP : SP \times \text{cos.}\, p$. Quindi intorno alle massime digressioni fatto retto l' angolo in *S* ed eguale a zero la cotangente *s*, l' espressione si

ridurrà a $ds : dt :: R : \text{sen.}^2 t :: TP^2 : SP^2 :: TS^2 + SP^2 : SP^2$; e nelle congiunzioni svanendo gli angoli T ed S, e diventando eguale al raggio il coseno dell' angolo P, si avrà $ds : dt :: TP : SP$, o sia nelle congiunzioni superiori come $TS + SP : SP$, e nelle inferiori come $TS - SP : SP$.

Nel caso pertanto di Venere, la cui distanza SP è alla distanza ST prossimamente come 0,731 : 1, sarà presso le massime digressioni $ds : dt :: 3 : 1$; nelle congiunzioni superiori come 17 : 7; e nelle congiunzioni inferiori come 7 : 18. dal che è manifesto che una deviazione, per esempio, di un minuto primo nella longitudine eliocentrica influisce di soli venti secondi nella geocentrica osservata all' occasione delle massime digressioni: influisce di venticinque nelle congiunzioni superiori, e di cento cinquanta quattro nelle congiunzioni inferiori. Allo stesso modo determinare si possono le ragioni delle variazioni di ciascuno elemento ch' entra nella formazione delle Tavole, ed assegnarne le circostanze più favorevoli all' osservazione.

Ma quanto è facile l' osservare un pianeta in opposizione quando passando esso al meridiano a mezza notte, prima e dopo è comodamente visibile; altrettanto difficili a farsi sono le osservazioni delle congiunzioni, quando il pianeta è immerso e sopraffatto dalla vivissima luce del Sole, col quale trovasi nella stessa direzione, e non presenta, come nelle congiunzioni inferiori, che una piccolissima parte della sua faccia illuminata. Quindi oltre i pochi casi, nei quali la latitudine geocentrica del pianeta essendo minore del semidiametro del Sole, se ne osserva l' interessante passaggio sopra il Sole stesso, trovansi assai rare nella storia dell' Astronomia le osservazioni delle congiunzioni, per le quali è necessario di unire alle più favorevoli circostanze nella posizione del pianeta anche un buono istromento per l' Astronomo.

Prima di dare qui l' osservazione da me fatta, premetto l' esposizione di alcune piccole ricerche relative alla medesima, e che sembranmi potere essere utili anche in altre circostanze. Queste riguardano principalmente l' inclinazione della fase di Venere, la quantità della luce, ed il massimo effetto prodotto dalla luce della medesima. E primamente avendo io osservato il Pianeta per più giorni, avanti e dopo la con-

giunzione col Sole, ed avendo avuto il piacere di vedere il rivolgimento della fase formata dal tenuissimo segmento lucido, il quale in diversi giorni successivamente si presentava al meridiano sotto diverse inclinazioni, ho cercato di determinare la quantità di tali inclinazioni, determinandone gli angoli col meridiano. Così i tempi degli appulsi ai fili del micrometro, ch' erano notati per maggiore esattezza e comodo al contatto della prima porzione lucida, che si presentava, potevano con precisione essere ridotti al centro del Pianeta, al quale tutto dovevasi riferire. A tale oggetto io ho determinato l' angolo formato coll' ecclittica dal diametro, che passa per l' estremità del segmento lucido, e mi sono servito de' seguenti principj, de' quali è dimostrata ed assai nota la verità. La fase lucida de' pianeti è uguale alla porzione della loro superficie compresa tra il circolo, che termina l' emisfero visibile dalla Terra, ed il circolo che termina l' emisfero illuminato dal Sole: e la larghezza della fase lucida stà al diametro del Pianeta, come il seno verso dell' angolo esterno formato al Pianeta dalle linee tiratevi dal Sole e dalla Terra sta al doppio raggio. L' intersezione del circolo visibile e del lucido è un diametro comune ad entrambi, il quale passa per le due estremità della fase: e come ogni diametro è sempre perpendicolare all' asse del suo circolo; così il diametro della fase è sempre perpendicolare alle due linee tirate dal Pianeta alla Terra ed al Sole, le quali sono appunto gli assi de' circoli visibile ed illuminato. E' parimente il diametro medesimo sempre perpendicolare al piano, nel quale trovansi gli assi, e il quale passa pe' centri del Pianeta, della Terra, e del Sole: e data l' inclinazione di questo piano al piano dell' ecclittica, ne sarà egualmente data per complemento l' inclinazione di quel diametro.

Rappresentino (*fig.* 2.) *T* la Terra, *S* il Sole, *P* il Pianeta, fuori del piano dell' ecclittica, nel quale sempre sono *T* ed *S*. Abbassata sul detto piano la normale *PP'*, e tirata *P'E* normale a *TS* sarà l' angolo *PTP'* eguale alla latitudine geocentrica; l' angolo *PTE* uguale alla elongazione del Pianeta; l' angolo *PEP'* eguale alla inclinazione del piano *TPSE* al piano dell' ecclittica; e l' angolo *P'PE* uguale alla ricercata inclinazione del diametro della fase. Quindi sarà *PP'* =

$TP' \times$ tang. latit; $P'E = TP' \times$ sen. elong., e tang. $P'PE = \frac{PE}{P'P}$ $= \frac{\text{sen. elong.}}{\text{tang. latit.}}$

Conosciuta quella inclinazione e combinata coll' angolo di posizione nel Pianeta, si avrà l' inclinazione della fase al meridiano: combinata nuovamente coll' angolo così detto parallattico, si avrà l' inclinazione al corrispondente verticale: e nella circostanza, in cui Venere sia occultata dalla Luna, si combinerà colla direzione dell' orbita apparente della medesima, affinchè la somma de' semidiametri, che usare si suole nel calcolo di simili osservazioni, si sminuisca della quantità, che compete al segmento oscuro di Venere, o ritenuta la somma de' semidiametri, si applichi la dovuta equazione al tempo del contatto osservato dalla parte oscura.

Applicando la formola alla Luna, per la quale essa ha luogo egualmente, si avrà il vantaggio di determinare la configurazione della medesima nelle circostanze di occultazioni di stelle. Inoltre tra le varie conseguenze che risultano da tale applicazione, merita per la pratica astronomica di essere avvertita quella, per cui si dimostra, che come non vi ha novilunio, fuori del nodo, in cui non siavi un piccolissimo segmento lucido corrispondente al mezzo seno verso della latitudine della Luna; così non vi ha plenilunio, in cui parimente non siavi il suo segmento oscuro. Quindi nell' osservare in simili circostanze la Luna sarà necessaria la precauzione di scegliere quel lembo, che non ne resta alterato; e nel computarne il diametro, o si dovrà misurare nella direzione parallela all' ecclittica, o si dovrà aumentare della quantità di cui resta sminuito per la fase oscura. Il quale sminuimento sebbene per una parte debba svanire nelle opposizioni, svanendo l' angolo di elongazione; non lascia però di avere luogo per l' altra cagione di essere fuori dell' ecclittica ed alla medesima inclinato il piano dell' orbita lunare. E coerentemente a tale inclinazione può riflettersi ancora al periodico rivolgimento della fase oscura, la quale dal lembo australe della Luna passa successivamente al lembo boreale, giusta il periodico movimento in latitudine della Luna medesi-

ma. Dal che è manifesto come alcune parti del disco lunare vicine al lembo australe debbono scoprirsi, mentre altre parti nel lembo opposto debbono nascondersi, avvicendandosi così successivamente il fenomeno, che forma una parte della librazione lunare.

Una seconda ricerca meno necessaria in vero per l' uso e per la riduzione dell' osservazione, ma pure dalla osservazione non aliena, anzi occasionata dalla medesima, può farsi sulla intensità e quantità della luce, che veniva riflettuta dalla tenue fase di Venere al tempo della congiunzione col Sole, e che in generale esser deve riflettuta in ogni altro punto della sua orbita. Quanto all' intensità del lume del Pianeta è ben manifesto, che seguendo essa la ragione inversa della somma de' quadrati delle distanze dal Sole e dalla Terra, doveva essere in questa inferiore congiunzione tanto maggiore di quella che stata sarebbe nella congiunzione superiore prossimamente come 42 : 1. La quantità poi del lume medesimo, che corrisponde alla quantità della parte illuminata visibile, essere doveva nel tenue segmento a quella di una piena fase prossimamente come 0,01 : 1.

Una ulteriore osservazione può farsi ancora in questo argomento. La facilità provata nel vedere distintamente il Pianeta, che, come si è detto, appena presentava una centesima parte del suo disco illuminato, mi ha fatto richiamare quanto aveva accennato nel suo Trattato di Ottica il Cel. *Bouguer* relativamente alla maggior luce, ch' egli credeva mandata dai pianeti nelle parti vicine ai lembi, che nelle parti poste intorno al centro, e per lo contrario del più grande splendore del Sole vicino al centro, che presso il lembo. Ed a fine di svolgere alquanto più la cagione di questo curioso ma incerto fenomeno, non sarà inutile il riflettere, che sebbene da ogni punto lucido della superficie planetaria si diffondono i raggi all' intorno; non può però essere uguale la copia de' medesimi in ogni direzione: ed essere vi deve una ragione, per cui quanto più i raggi si discostano dalla linea perpendicolare alla superficie d'onde escono, tanto minore sia la forza ed il numero loro. Imperciocchè se ugualmente si spargessero in isfera, il disco del pianeta risplenderebbe tanto più, quanto più le sue parti fossero distanti dal centro, ed il con-

torno dovrebbe essere infinitamente più illuminato del mezzo.

La verità di tale apparente paradosso si rende facilmente manifesta nell' osservare, che se ogni semicircolo *ADB* (*fig. 3*) nel Pianeta visto secondo la direzione *CDT* è progettato sulla retta *ACB*, le lineette $Cc = Ff = GA$ saranno le projezioni degli archetti corrispondenti *Dd*, *Ee*, *aA*: e se da ogni punto spargesi uguale copia di raggi in ogni direzione, la quantità de' raggi medesimi dovrà essere come il numero de' punti, ed il numero de' punti tanto più grande, quanto più grandi saranno gli archi. Ma gli archi *Dd*, *Ee*, *aA* crescono reciprocamente come i seni degli angoli *dDM*, *eEo*, *AaG*, i quali dall' angolo retto *dDM* formato dalla linea del centro *CDT* (dove diventa $cC = dD$) vanno successivamente decrescendo fino a svanire nel lembo. In oltre per la nota proprietà del circolo essendo $2AC : Aa :: Aa : AG$, se sia l' arco *Aa* infinitamente piccolo rispetto ad *AC*, sarà pure il medesimo infinitamente grande rispetto ad $AG = fF = cC = dD$: d' onde è manifesto, che la quantità di luce riferita in *cC* sarà infinitamente minore della riferita in *AG*.

Quindi segue ancora, che se il Pianeta in ogni parte della sua superficie ci sembra egualmente risplendere, la quantità de' raggi sparsi da ciascun punto sotto diverse inclinazioni sarà direttamente come i seni delle inclinazioni medesime, in ragione reciproca dei quali crescono i piccoli archi: così che quanto si sminuisce la luce, sminuendosi i seni delle inclinazioni, altrettanto cresca la medesima, crescendo gli archi. Ma se la luce del Pianeta ci compare maggiore nel contorno del disco che nel centro, o al contrario maggiore nel centro e minore nel lembo, la vivezza della luce medesima seguirà nel primo caso una ragione maggiore, e nel secondo caso una ragione minore di quella dei seni delle inclinazioni.

Le varie sperienze del *Bouguer* ci hanno fatto conoscere la legge che prossimamente osservasi nella riflessione della luce sotto diversi angoli, nei corpi che sembrano i più opportuni a simili ricerche, quali sono l' argento, la carta, il gesso. Nella seguente Tavola sono i risultati delle prove fatte sul gesso, che sembra avere più di analogia alla materia de' pianeti.

Inclinazione de' raggi	90°.	75°.	60°.	45°.	30°.	15°.
Seni delle inclinazioni	1000.	966.	866.	707.	500.	259.
Luce	1000.	762.	640.	529.	352.	194.

Ma convien pure non diſſimulare, che paſſando da queſti corpi terreſtri ai corpi celeſti, la coſa anderebbe a roveſcio, ſe vera foſſe l'oſſervazione del *Bouguer* riſpetto alla diverſa luce dei lembi che del centro. Altronde credo di poter dire che nè a me, nè agli Aſtronomi, che ne ho interrogato, è ſtata generalmente ſenſibile tale differenza di luce: anzi riguardo al Sole oſſervato con un buon micrometro obbiettivo del Dollond ho fatto più lucente ora l'una ora l'altra delle due imagini formate dall' iſtromento, ottenendo tale avvicendamento di luce col più piccolo movimento, che produceſſe qualche inclinazione riſpettiva nelle due mezze lenti: onde fatto il paragone fra il centro di una imagine ed il lembo dell' altra, come fu praticato dal *Bouguer*, ſi ſarebbe trovata prima un' apparenza, poi un' altra contraria.

Ritornando ora all' argomento, d'onde ſono partito, ed alla quantità di luce riflettuta dal Pianeta in qualunque punto della ſua orbita, il già citato Ch. *Bouguer* dimoſtra, che la porzione di eſſa che ci viene da ogni trapezio elementare della ſuperficie del Pianeta ſi rappreſenta in generale per

$$\frac{dt.\,dy.\sqrt{a^2-y^2}\,.\sqrt{a^2-g^2}}{a}$$

$$+\frac{b.\,dt.\,dy.\,(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}m}\,(a^2-t^2)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\,(a^2-g^2)}{a^{2m}}$$

nella quale formola ſi eſprime per a il ſemidiametro del Pianeta, per t e per y la poſizione di un punto C nella ſuperficie planetaria, del quale particolarmente ſi cerca la luce, per g il ſeno della metà dell' elongazione e della commutazione del Pianeta; per m l'eſponente di una quantità coſtante b, che, combinata coi ſeni delle inclinazioni dei raggi alla ſuperficie, miſuri la quantità de' medeſimi corriſpondente alle diverſe inclinazioni. Nel ſopraccitato Trattato di Ottica ſe ne può vedere la dimoſtrazione e l' integrazione in diverſe ipoteſi del valore di m. Intanto deve qui avvertirſi, che nella riportata formola non s' involge determinatamente la quanti-

tà di luce, che si disperde nella superficie planetaria, senza essere opportunamente riflettuta, e che perciò è ancora ignota l' assoluta ragione tra la luce che manda il Sole, e quella che ci viene dai pianeti. Ben è vero, che come il medesimo *Bouguer* ha osservato, che il lume lunare in plenilunio è prossimamente una parte trecentomillesima della luce solare; ed il Ch. *Baylli* ha portato la sagacità delle sue ricerche nella luce de' satelliti: così sembra che promovere si possa la delicatezza dell' osservazione, e raccolta nel foco di un eccellente obbiettivo la luce di ciascun pianeta tentare qualche paragone colla luce della Luna in diverse fasi, o altrimenti esaminarla con qualche fino stromento per determinarne i rapporti finora sconosciuti.

La terza ricerca tra le proposte di sopra riguarda il massimo effetto prodotto dalla luce di Venere, e la determinazione delle circostanze, nelle quali deve aver luogo. E sebbene l' *Halley* abbia data la soluzione di tale problema, inserita nelle Transazioni filosofiche e riferita nell' Astronomia del *La Lande*; sembra però che sulle tracce di questi celebri uomini si possa tornare su tale argomento, senza incorrere la taccia di fare una inutile repetizione. Il fatto egualmente osservato dagli Astronomi, che ammirato dal semplice volgo, è, che Venere dentro certo periodo di anni in pieno giorno si può da tutti vedere, come una brillante stella, senza alcuno mezzo di cannocchiale o di altro simile stromento. Un tale fenomeno manifesta abbastanza ch' essere vi deve un *massimo* dipendente dall' intensità insieme e dalla quantità di lume, che viene a noi riflettuto dal Pianeta: ed un tale massimo si determinerà, differenziata ed uguagliata a zero la formola, che esprima i detti elementi.

Lasciata però quella del *Bouguer*, che solo rappresenta la quantità della luce, ed è soverchiamente complicata al bisogno, è bene manifesto altronde che potendosi considerare rispettivamente costanti le distanze dal Sole di Venere e della Terra, l' intensità della luce di Venere deve dipendere dalla distanza della medesima dalla Terra; ed a questa distanza stessa avendo una conosciuta ragione anche la quantità della fase, alla quale corrisponde la quantità della luce, l' effetto massimo prodotto dalle due cagioni combinate insieme potrà essere determinato,

nato, determinando la corrispondente distanza: col quale elemento si conoscerà anche l'angolo di elongazione, nel quale il fenomeno deve accadere.

Già si è detto che l'area planetaria, e la quantità della fase lucida sono tra loro come il raggio alla metà del seno verso dell'angolo esterno formato al Pianeta dalle direzioni del Sole e della Terra. Se pertanto nel triangolo SPT (*fig.* 1) già sopra considerato sia $ST = m$, $SP = n$, $TP = x$, r il raggio, p l'angolo SPT, sarà per le note formole trigonometriche

$$\frac{r^2}{nx} \times \frac{n + m - x}{2} \times \frac{m + x - n}{2} = \text{sen.}^2 \frac{1}{2} p = \frac{r - \text{cos.}\, p}{2}$$

$= \frac{1}{2}$ sen. vers. p. Tal espressione ridotta all'angolo esterno SPQ colla dovuta mutazione di segni diverrà la stessa, che la data dall'*Halley*, e rappresenterà la grandezza della fase, e la quantità del lume, del quale parimente si esprimerà l'intensità, dividendo la formola per x^2 (*), e sarà $\frac{n^2 + 2nx + x^2 - m^2}{4nx^3}$. Questa differenziata e giusta il canone de' massimi, e de' minimi fatta eguale a zero, darà

$$\left(\overline{3m^2 - 3n^2} \times x^{-4} - 4nx^{-3} - x^{-2}\right) \frac{dx}{4n} = o,$$ e moltiplicando per

$\frac{4nx^4}{dx}$, sarà $3m^2 - 3n^2 - 4nx - x^2 = 0$; d'onde $x = \sqrt{3m^2 + n^2} - 2n = a$; e cos. elong. $= \frac{m^2 - n^2 + a^2}{2am}$.

E' perciò evidente che corrispondendo x ad un *massimo* qualunque sia il valore di m e di n, e verificandosi in fatti tan-

Ss

(*) Ad esprimere con più giusta precisione l'intensità della luce, si dovrebbe dividere la formola per $n^2 + x^2$. In tal caso il valore di x, dopo la differenziazione, si avrebbe per una equazione di quarto grado. Siccome però nella serie dell'operazioni si sono supposte costanti le quantità m ed n, la intensità del lume di Venere rispettivamente alla Terra è bastantemente e più semplicemente espressa pel solo $\frac{1}{x^2}$.

to il valore di x, quanto la corrispondente elongazione due volte in ciascuna rivoluzione di Venere; altrettante volte dovrebbe vedersi il fenomeno, se il medesimo potesse rappresentarsi per qualunque di cotesti massimi. Ma l' osservazione essendo contraria, converrà cercare o il massimo fra i minimi, o almeno uno fra i medesimi, che sia de' favorevoli, e sopratutto che corrisponda all' attuale osservazione. Il massimo fra i massimi si avrà allora quando il valore di x sia il minimo. Imperciocchè la quantità e l' intensità del lume è come $\frac{(n+x)^2-m^2}{4nx^3}$, ed il coseno della elongazione come $\frac{m^2-n^2+x^2}{2mx}$
Ora ciascuno di questi elementi cresce tanto più favorevolmente all' uopo, quanto più decresce l' x. Il valore poi di x sarà tanto più piccolo, quanto più piccolo sarà m, e più grande sarà n: ciò che è manifesto dalla sola ispezione della formola $x = \sqrt{3m^2+n^2}-2n$.

Dalla medesima formola, e dalla ragione tra m ed n che in qualunque circostanza si possa verificare risulta ancora che nei valori di x influisce più m, che n; quindi nel formare la serie delli x si combinerà prima m minimo, poi m medio, ed in fine m massimo con n massimo, medio, minimo: e si avranno nove valori dal più vantaggioso decrescenti fino al meno favorevole. Nella combinazione, per esempio, che Venere e la Terra siano nelle loro distanze medie, e sia $m=1$, sarà $x=0,43036$, e l'elongazione 39°. 43'. 30". Nella combinazione meno favorevole che sia Venere nella minima sua distanza e la Terra nella distanza sua massima, sarà $x = 0,46552$, e l'elongazione 39°. 5', 35". E nella combinazione più vantaggiosa che sia Venere nella distanza sua massima, e la Terra nella distanza sua minima, sarà $x=0,39532$, e l'elongazione 40°. 21'. 36".

Questa ultima combinazione, che corrisponde al massimo fra i massimi, non può avere luogo ne' secoli vicini a noi per l' attuale posizione dell' afelio di Venere, e del perihelio della Terra. Trovasi quello a dieci segni e nove gradi di longitudine eliocentrica, e questo a tre segni e nove gradi; quindi l' elongazione di Venere afelia vista dalla Terra perihelia deve essere solamente intorno a tredici gradi, e la ris-

pettiva distanza $x = n. \frac{\text{sen. commut.}}{\text{sen. elong.}}$ è prossimamente quattro volte maggiore di quella, che viene indicata dalla formola del massimo. La bella apparenza di Venere, che nel 1776, come si legge nelle Transazioni Filosofiche, fu ammirata dal popolo di Londra, quasi un prodigio, si osservò nel Luglio, quando la Terra e Venere erano presso il loro afelio, e perciò in una combinazione delle meno vantaggiose. Questo fatto ci dimostra abbastanza, che nella maggiore o minore facilità di vedere più luminoso il fenomeno, deve particolarmente influire lo stato della nostra atmosfera, non solamente per ciò che riguarda le sensibili nuvole o nebbie, ma per una più occulta causa, per cui si lasci un più facile o difficile passaggio ai raggi di luce. La cosa si conferma ancora dal riflettere che il fenomeno ne ritorna regolarmente dopo otto anni, quando pure Venere dentro tale periodo ritorna sensibilmente alla stessa combinazione di posizione: nè il medesimo trovasi osservato sul finire o sul cominciare dell'anno quando per una parte hanno luogo le combinazioni più favorevoli, ma per l' altra parte trovasi l' atmosfera in uno stato di minore facilità alla trasmissione della luce: come si può provare paragonando la luce del Sole al mezzodì di un giorno serenissimo del Decembre, con quella che il Sole medesimo manda essendo a 21 gradi di altezza sopra l' orizzonte in un giorno serenissimo del Giugno.

Vengo ora in fine ad esporre l' osservazione. Essa è stata fatta ad un quadrante murale di sei piedi di raggio collocato nel meridiano. Le differenze d' ascensione retta tra Venere e la Stella β del Cane minore, colla quale è stata paragonata, sono generalmente dedotte da tre appulsi ai fili del micrometro: le differenze di declinazione sono corrette per l' effetto della piccola differenza di rifrazione, e per la parallasse di Venere. La posizione vera della Stella presa dal catalogo del *La Caille* e ridotta in apparente colle consuete equazioni dell' aberrazione e della nutazione, era all' epoca dell' osservazioni in ascensione retta 108.° 50'. 8"; in declinazione boreale 8.° 43'. 2". Le posizioni apparenti di Venere dedotte dall' osservazione e ridotte in vere colle debite equazioni dell' aberrazione e della nutazione, sono paragonate colle corrispondenti posizioni calcolate sulle Tavole de *La Lande*.

1782 Marzo	*Tempo medio dell' osservazione*	*Differenza d' Ascension retta tra Venere e β del Cane Minore*	*Ascensione retta di Venere*	*Differenza di declinazione tra Venere e β*	*Declinazi di Vener*
11	0h. 51'. 26", 7	7h. 5'. 39", 4 = 106°. 42'. 9"	2°. 7'. 59"	+ 1. 18. 58	10°. 2'. 0
14	0. 33. 52, 0	7. 11. 26, 5 = 108. 9. 21	0. 40. 47	+ 0. 51. 37	9. 34. 39
18	0. 9. 34, 8	7. 20. 1, 5 = 110. 18. 18	358. 31. 50	— 0. 3. 45	8. 39. 17
19	0. 3. 25, 8	7. 22. 14, 2 = 110. 51. 32	357. 58. 36	— 0. 20. 43	8. 22. 19
19	23. 57. 18, 4	7. 24. 26, 2 = 111. 24. 35	357. 25. 33	— 0. 38. 33	8. 4. 29
20	23. 51. 11, 5	7. 26. 37, 4 = 111. 57. 26	356. 52. 42	— 0. 57. 16	7. 45. 4

	Tempo medio	*Longitudine di Venere osservata*	*Longitudine calcolata dalle Tavole*	*Differenza*	*Latitudine di Venere osservata*	*Latitudine calcolata dalle Tavole*	*Diffe za*
11	0h. 51'. 26", 7	0s. 5°. 58'. 36"	0s. 6°. 2'. 25"	+ 3'. 49"	8°. 20'. 59" B	8°. 19'. 40" B	− 1'.
14	0. 33. 52, 0	0. 4. 27. 57	0. 4. 31. 58	+ 4. 1	8. 30. 35	8. 29. 14	− 1.
18	0. 9. 34, 8	0. 2. 7. 34	0. 2. 11. 43	+ 4. 9	8. 31. 6	8. 29. 45	− 1.
19	0. 3. 25, 8	0. 1. 30. 22	0. 1. 34. 36	+ 4. 14	8. 28. 48	8. 27. 31	− 1.
19	23. 57. 18, 4	0. 0. 52. 42	0. 0. 57. 3	+ 4. 21	8. 25. 38	8. 24. 22	− 1.
20	23. 51. 11, 5	0. 0. 15. 3	0. 0. 19. 28	+ 4. 25	8. 21. 35	8. 20. 21	− 1.

SOPRA LA FORZA
CENTRIFUGA.

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella R. Università di Pavia.

1. RIdurre alla massima semplicità la dimostrazione delle varie affezioni della Forza Centrifuga, aggiugnervi alcune non inutili osservazioni, estenderne l' applicazione a qualche punto importante della Meccanica, e finalmente ricavarne la dimostrazione de' Teoremi Meccanici da me esposti nel primo Volume di queste Memorie della *Società Italiana*, è l' unico oggetto di questo breve Opuscolo. In esso io suppongo nota la dottrina generale delle forze acceleratrici, e parto dal notissimo principio, che la misura della forza centrifuga, ovvero anche della centripeta (giacchè l' una è sempre uguale all' altra) è il doppio della lineetta, la quale congiunge l' estremo dell' archetto infinitesimo descritto dal corpo in un istante coll' estremo di quella porzione della tangente di detto arco, cui il corpo descriverebbe in quello stesso istante colla velocità quivi acquistata, e senza l' azione di alcuna forza, la qual doppia lineetta divisa che sia pel quadrato dell' indicato istante esprime la vera quantità e misura della forza centrale, così centrifuga, come centripeta.

2. Immaginiamoci pertanto un corpo (la di cui massa fingeremo sempre concentrata in un sul punto) attaccato ad un filo; e questo fermato per una estremità ad un piano orizzontale, e disteso in retta linea dall' uno all' altro estremo lungo il detto piano. Si prescinda dall' attrito e da qualunque altro impedimento, e si dia al corpo un colpo in direzione perpendicolare al filo: il corpo incomincierà a descrivere un cerchio avente per semidiametro la lunghezza del filo, e quindi farà forza di stirare e stendere il filo, cioè e-

ſerciterà una forza centrifuga impiegata in queſto caſo a produrre la tenſione del medeſimo. Si chiami f la forza centrifuga, o la tenſione del filo, ddz la lineetta, che congiunge gli eſtremi dell' archetto e della tangente del cerchio (la qual lineetta ſi ſa eſſere infiniteſima di ſecond' ordine), r il raggio del cerchio, dt l' iſtante o tempicciuolo infiniteſimo, ds l' archetto, v la velocità del corpo per l' archetto ds, h l' altezza *dovuta* alla velocità v. Ciò poſto ſarà

TEOREMA I.

3. $f = \frac{v^2}{r} = \frac{2h}{r}$, *vale a dire la forza centrifuga nel cerchio in quel punto della circonferenza, dove il corpo ſi trova, è uguale al quadrato della velocità del corpo in quel punto, diviſo pel ſemidiametro, ovvero uguale al doppio dell' altezza* dovuta *a tale velocità, e diviſo pel raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

E' evidente, che la lineetta ddz diventa nel cerchio uguale al ſeno verſo dell' archetto ds, e conſeguentemente $ddz = \frac{ds^2}{2r}$. Ma $f = \frac{2ddz}{dt^2}$; dunque $f = \frac{ds^2}{rdt^2}$; e ſiccome $v = \frac{ds}{dt}$, ſi ha $f = \frac{v^2}{r}$. Perchè poi dalle leggi del moto equabilmente accelerato, poſta la gravità terreſtre acceleratrice $= 1$, ſi ricava $v^2 = 2h$, ſi ottiene pur anco $f = \frac{2h}{r}$. Il che era ecc.

4. CoROLL. Poichè nel corpo, che ſi rivolge in un cerchio, la forza centrifruga ha dovunque una direzione perpendicolare all' arco, ella non tende in conſeguenza nè ad accreſcere, nè a ſminuire la velocità del corpo per l' arco, la quale ſarà dunque la ſteſſa in tutti i punti della circonferenza, come pure la ſteſſa la forza centrifuga. Dunque il moto è uniforme, e la forza centrifuga è coſtante.

TEOREMA II

5. *L' arco circolare descritto dal corpo in un dato tempo è medio proporzionale fra il diametro del cerchio e lo spazio, che sarebbe da esso trascorso in quel tempo, se posto in libertà venisse sollecitato per tutto quel tempo dalla data forza centrifuga.*

DIMOSTRAZIONE.

Si è già dimostrato essere $2r : ds :: ds : ddz$, e chiamato t il tempo proposto sta parimenti $1 : t :: t : t^2$; onde moltiplicate le due analogie nasce $2r : tds :. tds : t^2 ddz$. Ma tds è l' arco descritto dal corpo con moto uniforme nel tempo t, perchè ds è l' archetto scorso in un istante: e $t^2 ddz$ è lo spazio scorso dal corpo libero nel medesimo tempo con moto uniformemente accelerato per l' azione costante della forza centrifuga, poichè ddz è lo spazietto descritto in un istante in virtù di tal forza. Dunque ecc. Il che era ecc.

6. COROLL. La velocità, colla quale il corpo si rivolge nel cerchio, è quella stessa che acquista scorrendo liberamente la metà del semidiametro per l' azione costante della forza centrifuga. Imperciocchè per le leggi del moto equabilmente accelerato, lo spazio da descriversi dal corpo per acquistare una tale velocità è la metà dell' arco percorso equabilmente nello stesso tempo. Ma pel Teorema antecedente quest' arco è medio proporzionale fra il diametro e il detto spazio. Dunque quattro volte il quadrato di esso spazio è uguale al prodotto di tale spazio nel diametro; e quindi si ha lo stesso spazio uguale alla metà del semidiametro

TEOREMA III.

7. *Le forze centrifughe di varj corpi mossi circolarmente come nel §. 2 sono come i quadrati delle loro velocità direttamente, e come i semidiametri inversamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando colle lettere majuſcole le quantità dianzi indicate colle minuſcole, ſi ha non meno $f = \frac{v^2}{r}$, che $F = \frac{V^2}{R}$ onde $f : F :: \frac{v^2}{r} : \frac{V^2}{R}$. Il che era ecc.

8. COROLL. I. Se i raggi ſono come i quadrati delle velocità, le forze centrifughe ſono eguali, e *viceverſa*.

9. COROLL. II. Se le velocità ſono come le poteſtà $n.^{eſime}$ de' raggi, le forze centrifughe ſono come le poteſtà $\overline{2n-1}.^{eſime}$ de' raggi medeſimi, e *viceverſa*; e quindi allorchè le velocità ſono in proporzione de' raggi; anche le forze centrifughe ſtanno in tal proporzione, e *viceverſa*.

TEOREMA IV.

10. *Le forze centrifughe de' corpi, che ſi muovono in un cerchio, ſono come i raggi direttamente, ed inverſamente come i quadrati de' tempi periodici, cioè de' tempi delle intere rivoluzioni*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando T, t i tempi periodici, C, c le circonferenze, è manifeſto per la legge del moto equabile, che $V = \frac{C}{T}$, $v = \frac{c}{t}$; e però $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: \frac{C^2}{T^2R} : \frac{c^2}{t^2r} :: \frac{R^2}{T^2R} : \frac{r^2}{t^2r} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$: Il che era ecc.

11. COROLL. I. Le forze centrifughe ſono come le velocità direttamente, e i tempi periodici inverſamente, perchè eſſendo $V : v :: \frac{C}{T} : \frac{c}{t} :: \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ne viene $F : f :: \frac{V}{T} : \frac{v}{t}$.

12. COROLL. II. Se i quadrati de' tempi periodici ſono come i raggi, le forze centrifughe ſono eguali, e *viceverſa*: così pure

pure se le velocità sono come i tempi periodici, le forze centrifughe sono eguali, e *viceversa*.

13. COROLL. III. Se i tempi periodici sono come le potestà $n.^{esime}$ de' raggi, le forze centrifughe sono inversamente come le potestà $\overline{2n - 1.}^{esime}$ de' medesimi raggi, e *viceversa*, e le velocità sono inversamente come le potestà $\overline{n - 1.}^{esime}$ de' raggi, e *viceversa*.

14. COROLL. IV. Se i tempi periodici sono in ragione sesquiplicata de' raggi (che è il caso delle rivoluzioni de' pianeti), le forze centrifughe, e però ancora le centripete sono in ragione inversa duplicata de' raggi, e *viceversa*, e le velocità in ragione inversa sudduplicata de' raggi, e *viceversa*.

TEOREMA V.

15. *Se la velocità del moto circolare è dovuta all' altezza uguale alla metà del semidiametro, cioè è uguale a quella che acquista un corpo libero cadendo per l' azione della gravità terrestre dall' altezza d' un mezzo semidiametro, allora la forza centrifuga uguaglia la gravità terrestre, e* viceversa.

DIMOSTRAZIONE.

In questa ipotesi diviene $h = \frac{1}{2} r$; e conseguentemente $f = \frac{2h}{r} = \frac{r}{r} = 1$, che è appunto la gravità terrestre. Il che era ecc.

SCOLIO.

16. Fino a qui non si è avuto riguardo alla massa del corpo, e perciò si è considerata la sola forza centrifuga *acceleratrice*, la quale si cangia in *motrice* con moltiplicarla per la massa. Dunque moltiplicando per le rispettive masse i termini delle precedenti ugualtà, e analogie si verrà ad ottenere i valori assoluti, e relativi delle forze centrifughe motrici. Così per esemp. nel caso di questo V. Teorema la forza

centrifuga motrice uguaglia il peſo del corpo, perchè poſta la ſua maſſa $= m$, ed eſſendo $f = 1$, naſce $mf = 1 \times m$, che è appunto il peſo del corpo; ond' è, che il filo ſarà teſo e ſtirato nè più, nè meno che ſe il corpo attaccatovi pendeſſe verticalmente, ed agiſſe contro il filo con tutto il ſuo peſo.

PROBLEMA I.

17. *Se il corpo attaccato al filo riceve un tal colpo, che il ſuo tempo periodico* t *ſia noto, e riſulti nel filo una tenſione uguale a quella che produce il peſo del corpo immobile e verticalmente pendente; ſi domanda qual ſia la lunghezza del filo, o il raggio* r *del cerchio.*

SOLUZIONE.

Suppoſto $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza, ſarà $2r\pi$ la circonferenza del cerchio deſcritto, e per la legge del moto uniforme ſi ha $t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$. Ora (§. 15.) $r = 2h$; dunque $t = \frac{2r\pi}{\sqrt{r}} = 2\pi\sqrt{r}$; e quindi $r = \frac{t^2}{4\pi^2}$. Il che era ecc.

SCOLIO.

18. Si noti qui bene, che ſiccome l' eſpreſſione $\frac{t^2}{4\pi^2}$ dee rappreſentare una quantità lineare, e $4\pi^2$ è un numero aſtratto, non può t^2 eſprimere che una linea, cui diremo l. Per determinare poi queſta ſi rifletta, che nominando θ il tempo, ed a l' altezza, da cui caſca un grave in quel tempo, naſce $\theta^2 = 2a$ nella preſente ipoteſi della gravità acceleratrice $= 1$. Laonde ſe t ſarà dato in ſecondi, ſtarà il numero de' ſecondi in θ^2 al numero de' ſecondi in t^2 come la linea $2a$ alla linea l, cioè ſi avrà $l = \frac{2t^2a}{\theta^2}$; e perchè fatto $\theta = 1'$ ſi tro-

va $a = 15, 1$ *pi.*, si ha quindi $l = t^2 \times 30, 2$ *pi.*, e conseguentemente $r = \frac{t^2}{4\pi^2} \times 30, 2$ *pi.*, essendo t dato in secondi.

19. COROLL. Se il tempo, che mette una palla inerte ma non pesante a descrivere la circonferenza d'un cerchio, è due volte tanto quanto il tempo d'un'oscillazione minima d'un pendolo, la di cui lunghezza è uguale al semidiametro r del predetto cerchio, e porta all'estremità una picciola massa pesante; la forza centrifuga *assoluta* o motrice della palla inerte è uguale al peso d'una massa grave di egual quantità di materia con detta palla. Imperciocchè si sa dalla dottrina de' pendoli, che il tempo d'un'oscillazione minima sta al tempo della caduta libera per la doppia altezza del pendolo, cioè pel diametro del cerchio descritto dalla palla inerte, come sta la semicirconferenza al diametro, ovvero come $\pi : 2$; onde essendo il tempo di tal caduta $= \sqrt{4r} = 2\sqrt{r}$, ne viene che il tempo dell'oscillazione sarà $= \pi\sqrt{r}$. Ma il tempo periodico della palla inerte è $= \frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$; dunque dovendo esser questo doppio di quello, nascerà $\frac{2r\pi}{\sqrt{2h}} = 2\pi\sqrt{r}$, e quindi $r = 2h$, cioè finalmente $f = \frac{2h}{r} = 1$, che è quanto dire la forza centrifuga acceleratrice uguale alla gravità terrestre; dal che deriva la forza centrifuga *assoluta* o motrice uguale al peso della palla considerata non solo come inerte, ma anche come grave.

PROBLEMA II. (*fig.* 1)

20. *Sia una curva* RA, *la quale rotandosi intorno all'asse verticale* AC *generi una sferoide, di cui tutte le sezioni orizzontali sono tanti cerchj aventi le ordinate* HM *della curva genitrice per raggi. Si collochi in qualunque interno luogo* M *della sferoide cava un grave, e gli si dia un colpo, per cui incominci a descrivere il cerchio corrispondente del raggio* HM. *Si domanda quanta esser debba la velocità impressa dal colpo, perchè il corpo non sia costretto dalla gravità a calare al basso, ma seguiti a moversi nel cerchio incominciato.*

SOLUZIONE.

Sia l' ascissa $AH = x$, l' ordinata $HM = y$, e l' altezza dovuta alla ricercata velocità $= h$. Condotta la normale CM alla curva, la verticale MN, e l' orizzontale MF in direzione del raggio HM, si ponga mente, che la gravità spinge il corpo secondo MN con uno sforzo $= 1$, e la forza centrifuga risultante dal moto circolare lo sollecita secondo MF con una spinta $= \frac{2h}{y}$; e però sia $FM : MN :: \frac{2h}{y} : 1$. Se pertanto il corpo ha da persistere in M, e così pure in ciascun punto della circonferenza, che ha HM per raggio, senza calare, nè ascendere, la risultante MO delle due forze MF, MN dovrà essere perpendicolare all' elemento della curva in M, sicchè resti interamente elisa. Laonde MO è un prolungamento della normale CM, e i triangoli simili OMF, MHC danno l' analogia $MN : MF :: CH : HM$, cioè $1 : \frac{2h}{y} :: \frac{ydy}{dx} : y$; ond' è $h = \frac{ydx}{2dy}$, cioè uguale alla metà della sottangente della curva genitrice. Data dunque la curva, la sua equazione differenziale farà conoscere l' altezza dovuta alla velocità ricercata. Il che era ecc.

21. COROLL. I. Se la sferoide è un cono colla punta in basso, cioè se la linea genitrice AM è retta, sicchè $y = nx$, si ottiene $h = \frac{1}{2} x$.

22. COROLL. II. Se è una paraboloide, ne viene $y = x$, doppia della precedente

PROBLEMA III.

23. *Nell' ipotesi precedente che il grave seguiti a muoversi dopo l' urto nel cerchio incominciato, si domanda l' equazione della curva genitrice quando la velocità impressa al corpo sia una funzione delle coordinate.*

SOLUZIONE.

Effendo in tal fuppofto h una funzione di x, y, ed infieme $=\frac{ydx}{2dy}$, co' metodi conofciuti del calcolo Integrale fi ritrova un' equazione fra y ed x. Il che ecc.

24. COROLL. I. Suppofta la velocità proporzionale all'ordinata, e però $h=\frac{y^2}{a}$, nafce $adx=2ydy$, ed integrando in ipotefi che fvanifcano infieme y ed x, fi ottiene $y^2=ax$, cioè la parabola conica.

25. COROLL. II. Suppofto $h=\frac{y^n}{a^{n-1}}$, proviene $2y^{n-1}dy$ $=a^{n-1}dx$, ed integrando $\frac{2}{n}y^n=a^{n-1}x$ in ipotefi, che fi annullino infieme y ed x, ed n fia un numero pofitivo.

26. COROLL. III. Se fi fuppone $h=\frac{x^2}{a^{n-1}}$, ne rifulta $\frac{2dy}{y}$ $=\frac{a^{n-1}dx}{x^n}$, e coll' integrazione proviene

$$2\log.y=\frac{-a^{n-1}}{(n-1)x^{n-2}}+\text{coft.}$$

PROBLEMA IV.

27. *Determinare la sferoide, nella quale collocato un grave in qualunque punto* M *della fua cavità, e colpito colla conveniente velocità, che lo obblighi a defcrivere il cerchio orizzontale fenza difcendere, compia il fuo giro fempre nello fteffo tempo.*

SOLUZIONE.

Effendo h l' altezza dovuta alla velocità, colla quale il grave percorre la circonferenza del raggio HM, offia y fenza effere coftretto a difcendere per la fua gravità, e $2\pi y$ la

circonferenza, proviene il tempo periodico coſtante $t = \frac{2\pi y}{\sqrt{2h}}$; e in conſeguenza $y^2 = \frac{t^2}{2\pi^2} h$. Il perchè la curva genitrice della sferoide è la parabola conica colle ordinate y, le aſciſſe h, e il parametro $\frac{t^2}{2\pi^2}$, e perciò la sferoide cercata è una paraboloide. Il che ecc.

28. COROLL. Col diſcorſo del §. 18. ſi trova il parametro di queſta parabola $= \frac{t^2}{2\pi^2} \times 30, 2$ *pi.*, prendendo il tempo t eſpreſſo in ſecondi.

PROBLEMA V. (*fig.* II.)

29. *Un filo* AC *fermato in* A *ſoſtiene nell' altro eſtremo* C *un grave (la di cui maſſa dee concepirſi concentrata in un punto): guidata la retta verticale* AB, *e portato il filo nella ſituazione obliqua* AC, *ſi dà al grave una percoſſa in direzione perpendicolare al piano* BAC, *ſicchè il grave incomincia a deſcrivere un cerchio normale ad* AB, *ed il filo* AC *un cono retto coll' aſſe* AB. *Si cerca quanta debba eſſere la velocità comunicata al corpo, affinchè continui a deſcrivere queſto cerchio, ed il filo a ſcorrere l' intiero cono*

SOLUZIONE.

Poichè CB normale a BA è raggio del cerchio percorſo, ſe ſi nomina h l' altezza dovuta alla ricercata velocità, la forza centrifuga del corpo in direzione di CE ſarà $= \frac{2h}{r}$, poſto $r = BC$, e la gravità terreſtre, che lo ſollecita ſecondo la verticale CI, è $= 1$. Preſe pertanto le linee CE, CI proporzionali a queſte forze, la loro azione non dee punto cambiare l' angolo BAC, ſe il filo ha da deſcrivere un cono. Perlochè la riſultante CF di eſſe forze dee trovarſi nella ſteſſa direzione del filo per poter eſſerne interamente diſtrutta. Ma la ſimilitudine de' triangoli ABC, CFE dà l' analogia

$CE:EF::CB:BA$, cioè fatta $AB=a$, risulta $\frac{2h}{r}:1::r:a$; dal che si raccoglie $h=\frac{r^2}{2a}$. Il che ecc.

30. COROLL. I. Il tempo periodico impiegato dal grave a descrivere il cerchio, e del filo a trascorrere il cono è $=\frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$, ed essendosi trovato $h=\frac{r^2}{2a}$, appare un tal tempo $=2\pi\sqrt{a}$; il che mostra, che i coni di egual altezza sono tutti descritti nel medesimo tempo; e che ad altezze disuguali i quadrati de' tempi periodici sono come queste altezze.

31. COROLL. II. Se la forza centrifuga di questo movimento è uguale alla gravità, il filo fa un angolo semiretto colla verticale, e *viceversa*: imperciocchè supposto $\frac{2h}{r}=1$, nasce $r=a$, e supposto $r=a$, nasce $\frac{2h}{r}=1$.

32. COROLL. III. Chiamato ϕ l'angolo CAB, ed l la lunghezza AC del filo, si ritrova $a=l\,\text{cos}.\,\phi$, e perciò $t=2\pi\sqrt{a}=2\pi\sqrt{l\,\text{cos}.\,\phi}$, cioè ne' coni, che hanno lo stesso angolo alla punta, i quadrati de' tempi periodici sono come le lunghezze de' fili, e generalmente come le lunghezze de' fili e i coseni degli angoli in punta, ovvero come le lunghezze de' fili, e i seni delle loro obliquità all' orizzonte.

33. COROLL. IV. Questo tempo periodico pel cono sta al tempo della libera caduta d' un grave dalla doppia altezza del cono come la circonferenza del cerchio al diametro; perchè il tempo di tal caduta per la dottrina del moto equabilmente accelerato si fa essere $=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$, e il tempo periodico si è trovato $=2\pi\sqrt{a}$.

34. COROLL. V. Se il cono è acutissimo per modo che sia a un dipresso $a=l$, e $\phi=0$, il tempo, in cui viene descritto, diventando $2\pi\sqrt{l}$, uguaglia il tempo, in cui resta descritto un cerchio, il di cui raggio sia la lunghezza del filo, e dove la forza centrifuga (§. 17.) sia uguale alla gravità.

35. COROLL. VI. Se il tempo periodico del filo per un cono

uguaglia il tempo della libera caduta d' un grave da un' altezza uguale alla lunghezza del filo, il seno dell' obliquità del filo all'orizzonte sta al seno tutto come il quadrato inscritto in un cerchio sta al quadrato della circonferenza, e *viceversa*. Imperciocchè quel tempo periodico $= 2\pi\sqrt{l}\, \text{cos}.\phi$, e quello della caduta $= \sqrt{2l}$; onde dovendo essere $\sqrt{2l} = 2\pi\sqrt{l}\, \text{cos}.\phi$, cioè $1 = 2\pi^2 \text{cos}.\phi$, nasce la proporzione $\text{cos}.\phi : 1 :: \frac{1}{2} : \pi^2$, ossia la proposta.

PROBLEMA VI. (*fig.* I.)

36. *Muovasi un corpo non libero nella linea* RMA *da* R *verso* A, *e venga continuamente sollecitato da una forza in direzione parallela all' asse* CA. *Si domanda la pressione, che il corpo esercita in ciascun luogo* M *della curva*

SOLUZIONE.

Si supponga, che il corpo abbia descritto l' arco RM, e si chiami p la forza, che lo sollecita secondo MP parallela all' asse. Risoluta questa nella *forza tangenziale* secondo la tangente MQ, e nella *forza normale* secondo la perpendicolare MO alla curva, nasce la forza tangenziale $= \frac{MQ}{MP}p$, e la *normale* $= \frac{MO}{MP}p$; e se si fa $AH = x$, $HM = y$, $AM = s$, è facile il conoscere, che $\frac{MQ}{MP} = \frac{-dx}{-ds} = \frac{dx}{ds}$; ed $\frac{MO}{MP} = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$: laonde la forza tangenziale $= \frac{pdx}{ds}$, e la forza normale $= \frac{pdy}{ds}$. La prima di queste non ha alcuna parte nel premere il corpo contro la curva, la seconda all' opposto è tutta impiegata in produrre questo effetto. Vi ha inoltre una forza risultante dal moto curvilineo, la quale è parimente tutta rivolta a premere il corpo perpendicolarmente contro la curva; perchè essendo l' archetto Mm della curva lo stesso che

che quello del suo circolo osculatore in M, sarà anche una tal forza del corpo nel punto M della curva la stessa che la centrifuga nel circolo osculatore percorso colla velocità in M acquistata, e però agirà in direzione di MO, o del raggio osculatore perpendicolare ad Mm. Il perchè chiamata h l' altezza dovuta alla velocità in M, r il raggio osculatore, si ottiene questa forza, ovvero la pressione contro $Mm = \frac{2h}{r}$. Dunque la pressione totale del corpo contro un luogo indeterminato M della curva è $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r} = \frac{pdy}{ds}$

$+ \frac{2h}{ds^3 : dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ per essere, come si sa, il raggio r dell' evoluta $= \frac{ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Se dunque la forza sollecitante p, e l' altezza h dovuta alla velocità in M sono quantità note, o anche date per le coordinate x, y, l' equazione della curva somministrerà il vero valore della pressione, che si cerca. Il che ecc.

37. Coroll. I. Per ritrovare la velocità del corpo in qualunque punto M della curva basta moltiplicare la forza tangenziale $\frac{pdx}{ds}$ per l' archetto $-ds$, ed ottiensi, come è noto, $dh = -pdx$, $h = -\int pdx + \text{cost.}$, e supposto, che il corpo parta da R colla velocità dovuta ad un' altezza nota a, e preso l' integrale $\int pdx$ per modo che svanisca allorchè $x = AB = b$, proviene $h = a - \int pdx$.

38. Coroll. II. Si ritrova il tempo t impiegato a scorrere l' arco indefinito RM colla nota formola $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2h}}$

$= \frac{-ds}{\sqrt{2(a - \int pdx)}}$, la quale dà $t = \int \frac{-ds}{\sqrt{(2a - 2\int pdx)}}$, prendendo queſt' integrale in modo che ſi annulli allorchè $s = AMR$, ovvero $x = a$.

39. COROLL. III. Se un corpo viene lanciato da B in direzione di BA con una velocità dovuta alla predetta altezza a, ed agiſce in eſſo la ſteſſa forza ſollecitante p comunque variabile in direzione parimente di BA, e ſi chiama h' l' altezza dovuta alla velocità in H, naſce anche in queſto caſo $dh' = -pdx$, ed $h' = a - \int pdx = h$. In conſeguenza acquiſta egli la ſteſſa velocità così diſcendendo per l' altezza rettilinea BH, come per la via comunque curvilinea RM; e lo ſteſſo accade quand' anche il corpo incominci a moverſi dalla quiete, cioè ſenza velocità impreſſa.

40. COROLL. IV. Se il corpo con una data velocità dovuta all' altezza a incomincia a moverſi da A verſo M ſulla linea obbligata AM, ed intanto agiſce in eſſo continuamente la forza p in direzione parallela all' aſſe dal baſſo all' alto, ſiccome in queſto caſo la forza tangenziale tende a ſminuire la velocità del corpo, ſi ritrova $pdx = -dh$, ed $h = a - \int pdx$, prendendo però l' integrale $\int pdx$ in modo che ſi annulli con x. Perchè poi trovaſi queſta ſteſſa formola anche pel corpo lanciato da A lungo l' aſſe AC colla ſteſſa velocità, ed animato dalla ſteſſa forza p in direzione oppoſta al ſuo moto; quindi ne viene, che o il corpo aſcenda per la via rettilinea AM, o per la curvilinea di qualunque forma AM, ad eguali elevazioni in H, ed M ſi trova aver perdute uguali velocità; coſicchè nell' integrale $\int pdx$ ſe ſi prende x di tal grandezza AB, che il detto integrale diventi $= a$, ſi eſtingue tutta la velocità del corpo ſia che s' inalzi direttamente per AB, ſia che aſcenda ad uguale elevazione per l' arco comunque formato AR. Giunto poi in B oppure in R diſcende dalla quiete per BA, ovvero per RMA per l' azione continua della forza p ſollecitante dall' alto al baſſo, ed acquiſta in A nell' un caſo e nell' altro la medeſima velocità.

PROBLEMA VII. (*fig.* III.)

41. *Dall' estremità* G *d' un filo fermato in* C *pende un grave, e sollevandosi il filo disteso nella situazione orizzontale* CA *si abbandona a se stesso sicchè il corpo incominci a descrivere l' arco* AE *del cerchio verticale* AGBF. *Si fa la ricerca quanto sia premuto dal grave qualunque punto* E *della circonferenza del cerchio, ovvero quanto sia teso il filo in qualunque situazione.*

SOLUZIONE.

Nominate al solito x, y le coordinate GQ, QE, ed r il semidiametro, si ha pel cerchio l' equazione $y^2 = 2rx - x^2$, $ydy = (r-x)dx$, $y^2dy^2 = (r-x)^2 dx^2$, $\frac{(2rx - x^2)dy^2}{(r-x)^2} = dx^2$, $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{r^2dy^2}{(r-x)^2}$, $ds = \frac{rdy}{r-x}$. Ora, quando il grave è disceso per AE, ha acquistato in E una velocità dovuta all' altezza $CQ = r - x$ (§. 39.). Dunque fatte queste sostituzioni nella formola della pressione $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e posto $p = 1$, perchè la forza sollecitante in quest' ipotesi è la gravità, si ottiene la cercata pressione in $E = \frac{r-x}{r} + \frac{2r-2x}{r}$ $= \frac{3r-3x}{r}$, cioè uguale a tre volte l' altezza CQ dell' arco descritto. Il che era ecc.

42. COROLL. I. Nel punto infimo G, dove $x = 0$, la pressione uguaglia tre volte la gravità; e moltiplicando per la massa del corpo, risulta la pressione *motrice* (che è la pressione propriamente detta), e quindi la tensione del filo tre volte maggiore del peso del corpo.

43. COROLL. II. Rimosso il filo dalla direzione verticale, e portato nella situazione obliqua CI, e qui abbandonato, la pressione in qualunque punto E proviene

$= \frac{r - x}{r} + \frac{2a - 2x}{r} = \frac{r + 2a - 3x}{r}$, chiamando a l'altezza *GN* del corpo sopra il punto infimo, ed avuto riguardo alla velocità acquistata dal corpo in *E*, la quale è dovuta all' altezza $NQ = a - x$ della discesa (§. 39.). La pressione poi nel punto infimo *G* nasce $= \frac{r + 2a}{r}$.

44. CoROLL. III. Se l' arco *GI* è di 60°, la pressione in *G*, ovvero la tensione del filo fa due volte il peso del corpo, giacchè in questo caso $a = \frac{1}{2} r$, onde $\frac{r + 2a}{r} = 2$

PROBLEMA VIII.

45. *Se un grave pendente da un filo fermato in* C *viene obbligato a percorrere il cerchio verticale* AGBF; *si domanda quanto sia teso il filo da questo corpo allorchè passa pel punto infimo* G.

SOLUZIONE.

Se il corpo trovandosi in *A*, quando il filo è tenuto nella situazione orizzontale *CA*, casca dalla quiete e descrive il quadrante *AG*, acquista in *G* la velocità dovuta all' altezza del semidiametro *CG* (§. 39.), velocità che interamente si estingue con portarsi che fa il corpo ad uguale altezza in *B* per l' altro quadrante *GB*. E' dunque mestieri al corpo in quiete nel punto *A* dare un tal urto in direzione della tangente, che lo obblighi a salire da *G* fino al punto supremo *F*, e a tender quivi il filo con una forza per lo meno eguale al suo peso: dico *per lo meno*, poichè una forza maggiore del peso del corpo non produrrebbe qui alcun inconveniente se non forse quello di allungare il filo, al che rimedia l' ipotesi del filo *inestensibile*, ma una forza minore del peso non impedirebbe il corpo di cascare per *FC* senza poter continuare a percorrere tutto il cerchio. Laonde chiamata *b* l' altezza dovuta alla velocità del corpo nel più alto punto *F*, debb'

essere la tensione del filo, o la forza centrifuga $\frac{2h}{r}$ per lo meno $= 1$, e quindi $h = \frac{1}{2} r$. Ma il corpo nel salire per la semicirconferenza GBF perde (§. 40.) tanta velocità quanta è quella che è dovuta all' altezza $GF = 2r$: dunque ritenendo in F ancora la velocità dovuta per lo meno all' altezza $\frac{1}{2} r$, dee avere in G la velocità per lo meno dovuta all' altezza $\frac{5}{2} r$. Conseguentemente la forza centrifuga del corpo in G sarà per lo meno $= \frac{5r}{r} = 5$, cioè cinque volte la gravità, o a meglio dire denominata m la massa del corpo, la forza centrifuga riuscirà $= \frac{5rm}{r} = 5m$, vale a dire a cinque volte il suo peso. E siccome nel punto infimo G il filo vien teso non solo dalla forza centrifuga, ma ancora da tutto il peso del corpo pendente, proviene perciò la tensione in G almeno sei volte maggiore del peso del corpo. Il che ecc.

46. COROLL. I. Per trovare (in quest' ipotesi che la tensione del filo in G sia sei volte il peso del corpo) la tensione di esso in qualunque punto E de' due quadranti inferiori AEG, GSB, si ricorre alla formola $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e si osserva, che in questo caso la velocità impressa al corpo in A colla percossa è dovuta all' altezza $\frac{3}{2} r$, e conseguentemente in E è dovuta all' altezza $\frac{3}{2} r + CQ = \frac{5}{2} r - x$; dal che si raccoglie $h = \frac{5}{2} r - x$; e già si è trovato $\frac{pdy}{ds} = \frac{r - x}{r}$. Perlochè la tensione del filo in E $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r} = \frac{r - x}{r} + \frac{5r - 2x}{r}$ $= \frac{6r - 3x}{r}$.

47 COROLL. II. Per determinare poi la tensione del filo in qualsivoglia punto de' due quadranti superiori *AVF*, *FHB* convien fare attenzione, che in questo caso la gravità in vece di cospirare colla forza centrifuga ad accrescere la tensione, vi si oppone anzi e ne sminuisce l' azione; onde per questa parte il termine $\frac{pdy}{ds}$ dovrebbe sottrarsi dall' altro $\frac{2h}{r}$: ma siccome in questo stesso caso la frazione $\frac{dy}{ds}$ è necessariamente negativa, perchè quando il corpo ascende per l' uno o l' altro de' due quadranti cresce la s e scema la y, e quando discende cresce la y e scema la s; quindi nasce che il termine $\frac{pdy}{ds}$ rimane additivo, come lo era nel primo caso. Sicchè anche pe' due quadranti superiori risulta la tensione del filo $= \frac{6r - 3x}{r}$, intendendo per x un' ascissa maggiore del semidiametro, come è *GL* per riguardo al punto *H*, e *GO* per rispetto al punto V.

PROBLEMA IX.

48. *Tenuto il filo nella situazione orizzontale* CA *si cerca nel raggio verticale* CG *un tal punto* Q, *che piantandovi un chiodo e lasciando cadere il corpo liberamente questo descriva intorno a* Q *un intero cerchio colla parte* GQ = QN *del filo, attortigliandosi (senza però accorciarsi) intorno a* Q.

SOLUZIONE.

Giunto il corpo in *G* acquista la velocità dovuta all' altezza r, alzandosi poi sino in *N* perde tanta velocità quanta è dovuta all' altezza *GN*, cioè $2x$, facendo $GQ = x$. Dunque ritiene in *N* una velocità dovuta all' altezza $r - 2x$, ed ha quivi una forza centrifuga $= \frac{2r - 4x}{x}$. Ora questa forza dee per lo meno essere uguale alla gravità, se il corpo ha da sos-

tenersi in N, e proseguire il suo moto circolare. Perciò si ricava $\frac{2r-4x}{x}=1$, e di qui $x=\frac{2}{5}r$. Il che ecc.

PROBLEMA X. (*fig.* I.)

49. *Determinare la curva* RA *situata in un piano verticale, la quale da un grave, che discende per essa e che ha ricevuta una velocità primitivamente impressa, sia premuta ugualmente in tutti i suoi punti.*

SOLUZIONE.

Posta n la massa del corpo si è dianzi trovato, che la pressione contro qualunque punto indefinito M è $=\frac{ndy}{ds}$ $+\frac{2nhdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$; e siccome si suppone costante, e però equivalente al peso d' una data massa m, si ha quindi $\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}$ $+\frac{2hdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$. Ora essendo a l'altezza dovuta alla velocità impressa al corpo in R, e BH, cioè $BA-AH$, ossia $b-x$ l' altezza dovuta alla velocità acquistata nella discesa per RM, proviene $h=a+b-x$, e conseguentemente

$$\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}+\frac{2(a+b-x)dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}.$$

Per facilitare l' integrazione di questa equazione, supporremo costante la ds, che dà $dds=d\sqrt{dx^2+dy^2}=0$, cioè $ddx=\frac{-dyddy}{dx}$. E poichè

$dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx^2\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = dxddy - dyddx$, fatta la sostituzione del valore di ddx, apparisce $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $= \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx} = \frac{ds^2 ddy}{dx}$; onde la nostra equazione diventa $\frac{m}{n} = \frac{dy}{ds} + \frac{2(a+b-x)\,ddy}{dsdx}$, cioè $\frac{m}{n} dsdx = dydx +$ $2(a+b-x)\,ddy$. Divido questa equazione per $2(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, ed ottengo $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}} dsdx = \frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}} dydx$ $+ (a+b-x)^{\frac{1}{2}} ddy$, il di cui integrale si trova subito essere $\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} ds = (a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy + C\,ds$. La costante C si determina con supporre, che l' angolo formato dalla tangente della curva colla verticale nel punto R della partenza del corpo sia noto, ed $= \phi$: allora essendo $\frac{dy}{ds}$

$$= \frac{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}{(a+b-x)^{\frac{1}{2}}}$$

, e $\frac{dy}{ds}$ rappresentando il seno d' un tal angolo per un punto indefinito della curva, risulta pel punto dato R, dove $x = b$, sen. $\phi = \frac{m}{n} - \frac{C}{\sqrt{a}}$, e conseguentemente $C = \left(\frac{m}{n} - \text{sen.}\,\phi\right)\sqrt{a}$. Riguardo ora C come una quantità determinata, e dall' equazione integrata ricavo

$$ds = \frac{(a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy}{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}$$, cioè

$ds^2 =$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{(a+b-x)\,dy^2}{(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C)^2}$$; e quindi

$$dy^2 = \frac{(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C)^2\,dx^2}{a+b-x-(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C)^2}$$, e per ultimo

$$dy = \frac{(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C)\,dx}{\sqrt{a+b-x-(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C)^2}}$$. Per integrare queſt' equazione prendo $u = (a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, $u^2 = a+b-x$, $-2udu = dx$, ed ottengo $dy = \frac{-2(\frac{m}{n}u - C)\,udu}{\sqrt{(u^2 - \frac{m^2}{n^2}u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2)}}$, e poſto $1 - \frac{m^2}{n^2} = K^2$, ne traggo $dy = \frac{2(C - \frac{m}{n}u)\,udu}{\sqrt{(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2)}}$.

Piglio inoltre $\sqrt{(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2)} = Ku + z$, e però $\frac{2m}{n}Cu - C^2 = 2Kzu + z^2$, ovvero $u = \frac{C^2 + z^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz}$,

$$du = \frac{2zdz(\frac{2m}{n}C - 2Kz) + 2Kdz(C^2 + z^2)}{(\frac{2m}{n}C - 2Kz)^2}$$

$$= \frac{\left(KC^2 + \frac{2m}{n} Cz - Kz^2\right) dz}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^2}, \quad Ku + z = \frac{KC^2 + Kz^2}{\frac{2m}{n} C - 2Kz} + z$$

$$= \frac{KC^2 + \frac{2m}{n} Cz - Kz^2}{\frac{2m}{n} C - 2Kz} = \sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2\right)},$$

$$\frac{du}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2\right)}} = \frac{dz}{\frac{m}{n} C - Kz}.$$ Resta a trovare

$2\left(C - \frac{m}{n} u\right) u$ dato pure per z, e già si vede essere

$$C - \frac{m}{n} u = C - \frac{\frac{m}{n} C^2 - \frac{m}{n} z^2}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)} = \frac{\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)},$$ e quindi

$$2\left(C - \frac{m}{n} u\right) u = \frac{(C^2 + z^2)\left(\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2\right)}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^2},$$ e final-

mente $$\frac{2\left(C - \frac{m}{n} u\right) udu}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n} Cu - C^2\right)}}$$

$$= \frac{(C^2 + z^2)\left(\frac{m}{n} C^2 - 2CKz - \frac{m}{n} z^2\right) dz}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3Kz - 2CKz^3 - \frac{m}{n} z^4\right) dz}{2\left(\frac{m}{n} C - Kz\right)^3}.$$ Si faccia

$\frac{m}{n} C - Kz = t$, $z = \frac{\frac{m}{n} C - t}{K}$, $dz = -\frac{dt}{K}$. Laonde la precedente espressione si trasforma in

$$\frac{-\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3\left(\frac{m}{n} C - t\right) - \frac{2C}{K^2}\left(\frac{m}{n} C - t\right)^3 - \frac{1}{K^4}\left(\frac{m}{n} C - t\right)^4\right)\frac{dt}{K}}{2t^3} =$$

$$\left(\frac{m}{n} C^4 - 2C^3 t + \frac{2m^3 C^4}{n^3 K^2} - \frac{6m^2 C^3 t}{n^2 K^2} + \frac{6mC^2 t^2}{nK^2} - \frac{2Ct^3}{K^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{K^4}\left(\frac{m^4}{n^4} C^4 - \frac{4m^3}{n^3} C^3 t + \frac{6m^2}{n^2} C^2 t^2 - \frac{4m}{n} Ct^3 + t^4\right)\right)\frac{dt}{2Kt^3},$$

la quale è integrabile parte algebraicamente, parte per la quadratura dell' iperbola. Dunque ecc. Il che ecc.

50. COROLL. I. Se si vuole, che la pressione costante sia uguale al peso istesso del corpo, cioè $n = m$ si ha

$dy = \frac{(2Cu - 2u^2)\, du}{\sqrt{(2Cu - C^2)}}$. Perciò posto $\sqrt{(2Cu - C^2)} = p$, cioè

$2Cu - C^2 = p^2$, $Cdu = pdp$, $u = \frac{p^2 + C^2}{2C}$, $2Cu - 2u^2 = p^2$

$+ C^2 - \frac{(p^2 + C^2)^2}{2C^2} = \frac{C^4 - p^4}{2C^2}$, $\frac{(2Cu - 2u^2)du}{\sqrt{(2Cu - C^2)}} = \frac{(C^4 - p^4)dp}{2C^3}$.

Laonde l' integrale sarà $y = \frac{1}{2} Cp - \frac{p^5}{10\, C^3} + \text{cost.}$

$$= \frac{1}{2} C\sqrt{(2Cu - C^2)} - \frac{(2Cu - C^2)^2 \sqrt{(2Cu - C^2)}}{10\, C^3} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{2} C\sqrt{(2Cu - C^2)} - \frac{(2u - C)^2 \sqrt{(2Cu - C^2)}}{10\, C} + \text{cost.}$$

$= \frac{(2C^2 + 2Cu - 2u^2)\sqrt{(2Cu - C^2)}}{5C} + \text{cost.} = \big(2C^2 + 2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$
$- 2a - 2b + 2x\big)\sqrt{\big(2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C^2\big)} + \text{cost.}$ Sicchè annullandosi insieme y ed x, proviene $\text{cost.} = \big(2a + 2b - 2C^2$
$- 2C(a+b)^{\frac{1}{2}}\big)\sqrt{\big(2C(a+b)^{\frac{1}{2}} - C^2\big)}$. Dunque finalmente $y = \big(2a + 2b - 2C^2 - 2C(a+b)^{\frac{1}{2}}\big)\sqrt{\big(2C(a+b)^{\frac{1}{2}} - C^2\big)}$
$+ \big(2C^2 + 2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - 2a - 2b + 2x\big)\sqrt{\big(2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C^2\big)}$.

51. COROLL. II. Qualora vogliasi, che la pressione non sia costante, ma variabile secondo una data legge, la quantità $\frac{m}{n}$ sarebbe variabile, e sarebbe nota la legge della sua variazione. Se per esempio si suppone, che la pressione sia in ogni punto proporzionale alla velocità del corpo, $\frac{m}{n}$ diviene proporzionale a $\sqrt{(a+b-x)}$; onde presa una quantità nota λ nasce $\frac{m}{n} = \lambda(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$. Perlochè

$$dy = \frac{(\lambda(a+b-x) - C)dx}{\sqrt{(a+b-x-(\lambda(a+b-x)-C)^2)}};$$

e posto $a+b-x = u$, si trova $dy = \frac{(C - \lambda u)du}{\sqrt{(u^2 - \lambda^2u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$. Per integrare questa equazione bisogna renderla razionale, ed a quest'effetto cerco prima i divisori della quantità radicale, supponendo $u - \lambda^2u^2 + 2C\lambda u - C^2 = 0$, cioè $u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2} = 0$, donde si trae $u = \frac{2C\lambda + 1 \pm \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}$. Laonde si ha

$$\left(u - \frac{2C\lambda - 1 - \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right)\left(u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}\right) = u^2$$
$$- \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2};$$

e moltiplicando per λ^2, e mutando i segni apparisce $-\lambda^2u^2 + 2C\lambda u + u - C^2 =$

$$\left(-\lambda u+\frac{2C\lambda+1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}\right)\left(\lambda u-\frac{2C\lambda-1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}\right).$$

Prendo per brevità $\frac{2C\lambda+1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}=f$, e parimente $\frac{-2C\lambda-1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}=g$; ciò fatto la noſtra equazione da integrarſi ſi cangia in $dy=\frac{(C-\lambda u)\,du}{\sqrt{(u-\lambda^2u^2+2C\lambda u-C^2)}}$ $=\frac{(C-\lambda u)\,du}{\sqrt{(\overline{f-\lambda u}\times\overline{g+\lambda u})}}$. Aſſumo ora $\sqrt{(\overline{f-\lambda u}\times\overline{g+\lambda u})}$ $=(f-\lambda u)z$; ond' è $g+\lambda u=(f-\lambda u)z^2$, $\lambda u+\lambda uz^2$ $=fz^2-g$, $u=\frac{fz^2-g}{\lambda+\lambda z^2}$, $du=\frac{2f(\lambda+\lambda z^2)zdz-2\lambda(fz^2-g)zdz}{(\lambda+\lambda z^2)^2}$ $=\frac{2\lambda(f+g)zdz}{(\lambda+\lambda z^2)^2}$. Parimente ſi trova $(f-\lambda u)z$ $=\left(f+\frac{\lambda g-\lambda fz^2}{\lambda+\lambda z^2}\right)z=\frac{(f+g)z}{1+z^2}$, $C-\lambda u=C+\frac{g-fz^2}{1+z^2}$ $=\frac{C+g+(C-f)z^2}{1+z^2}$, $(C-\lambda u)\,du$ $=\frac{2(C+g)(f+g)zdz+2(C-f)(f+g)z^3dz}{\lambda(1+z^2)^3}$. Dunque $dy=\frac{2(C+g)dz+2(C-f)z^2dz}{\lambda(1+z^2)^2}=\frac{2(C+g)}{\lambda}\times\frac{dz}{(1+z^2)^2}$ $+\frac{2(C-f)}{\lambda}\times\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$. Riduco prima ad integrazione il primo termine di queſto ſecondo membro ricorrendo al noto Teorema del Calcolo Integrale, che $\int\frac{dt}{(a+bt^2)^n}$ $=\frac{t}{(2n-2)a(a+bt^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a}\int\frac{dt}{(a+bt^2)^{n-1}}$; onde fatto il confronto con $\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$, ſi trova queſto

$$= \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\text{arc. tang. } z .$$

Parimente paragonando l' altro termine $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$ col noto canone del Calcolo Integrale $\int\frac{t^p dt}{(a+bt^m)^q} =$

$$\frac{-t^{p-m+1}}{m(q-1)b(a+bt^m)^{q-1}} + \frac{(p-m+1)}{(q-1)mb}\int\frac{t^{p-m}dt}{(a+bt^m)^{q-1}}$$

ottengo $\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} = \frac{-z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2} =$

$- \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\text{arc. tang. } z$. Dunque risulta $y = \frac{(C+g)z}{\lambda(1+z^2)}$

$$+ \frac{C+g}{\lambda}\times\text{arc. tang. } z + \frac{(f-C)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{C-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{2C+g-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f)\sqrt{\left(\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)}}{\lambda\left(1+\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. }\sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\overline{g+\lambda u}\times\overline{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. }\sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-x-(\lambda\times\overline{a+b-x}-C)^2\right)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. }\sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-x-(\lambda\times\overline{a+b-x}-C)^2\right)}$$

$$- \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-(\lambda\times\overline{a+b}-C)^2\right)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda}\times\text{arc. tang. }\sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}}$$

$$-\frac{2C+g-f}{\lambda}\text{ arc. tang. }\sqrt{\left(\frac{g+\lambda\times\overline{a+b}}{f-\lambda\times\overline{a+b}}\right)}.$$

52. COROLL. III. Se si vuole, che la legge della variazione della pressione sia di essere in ragione inversa della velocità del corpo, allora $\frac{m}{n}$ si cangia in $\frac{\lambda}{\sqrt{(a+b-x)}}$, e conseguentemente si ha $dy=\frac{(\lambda-C)\,dx}{\sqrt{(a+b-x-(\lambda-C)^2)}}$, ed integrando $y=2(C-\lambda)\sqrt{a+b-x-(\lambda-C)^2}-2(C-\lambda)\sqrt{a+b-(\lambda-C)^2}$.

PROBLEMA XI (*fig.* IV)

53. *Se per la convessità della curva* AMB *scavata in foggia di canale, ed avente il suo asse in situazione verticale, discende un grave partendo da qualunque punto della curva, si domanda quel punto, dove il corpo abbandona la curva, e si distacca dal canale.*

SOLUZIONE.

La gravità $=1$, che tiene il corpo attaccato alla curva, agisce con uno sforzo $=\frac{dy}{ds}$ (§. 36) chiamando y la NM, x la AN, s l' arco AM, e con questo sforzo il corpo preme il canale. Ma ad un tale sforzo direttamente si oppone quello della forza centrifuga, che spinge il corpo lungi dalla curva in direzione ad essa perpendicolare, e che si è trovato $=\frac{2h}{r}$, preso r pel raggio del circolo osculatore della curva in quel punto, dove il corpo si trova, ed h per l' altezza dovuta alla velocità del corpo in quel punto. Quando adunque sarà $\frac{dy}{ds}=\frac{2h}{r}$, ovvero $\frac{dy}{ds}-\frac{2h}{r}=0$, allora il grave abbandonerà la curva, e si distaccherà dal canale descrivendo, come è manifesto, una parabola conica in virtù dell' impeto acquistato nel punto del distacco, e delle sollicitazioni co-

ſtanti della gravità. Pertanto l' equazione della curva applicata alla formola $\frac{dy}{ds} - \frac{2h}{r} = 0$ farà conoſcere l' aſciſſa, o l' ordinata corriſpondente al punto del diſtacco, che ſi cerca. Il che ecc.

54. COROLL. I. Se *AMB* è un arco di cerchio col raggio *r*, e parte il corpo dalla quiete dal punto più alto *A*, già ſi ſa eſſere $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, $2h = 2x$; conſeguentemente $\frac{r-x}{r} - \frac{2x}{r} = 0$, $x = \frac{1}{3}r$. Il che moſtra, che il punto del diſtacco corriſponde ad un' aſciſſa che è la terza parte del raggio, e però è l' eſtremità dell' arco di 48°. 12′ all' incirca.

55. COROLL. II. Se il corpo ſi muove dalla quiete dal punto *M*, e ſia $AN = a$, $AG = x$, $GF = y$, diventa $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, $2h = 2NG = 2x - 2a$; onde $\frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = 0$, e quindi $x = \frac{r+2a}{3}$, o piuttoſto $x - a = NG = \frac{r-a}{3} = \frac{1}{3}NC$ eſſendo *C* il centro. Dal che ſi vede, che il punto del diſtacco è l' eſtremo dell' arco che ha per altezza la terza parte del coſeno dell' arco *AM*, dal cui termine comincia il moto.

56. COROLL. III. Di qui appariſce la bella proprietà meccanica del cerchio verticalmente eretto, che ſe per la ſua conveſſità ſcavata in canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è ſempre il terzo dell' altezza di detto arco continuato ſino al diametro orizzontale.

57. COROLL. IV. Nella parabola conica col parametro $= 2p$ dalla ſua equazione $y^2 = 2px$ ſi inferiſce $ydy = pdx$,

$$dx^2 = \frac{y^2dy^2}{p^2},\ ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2+y^2)\,dy^2}{p^2},$$

ds =

$ds = \frac{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dy}{p}$; ond' è $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+2px)}}$.
Si sa inoltre, che il raggio osculatore di tutte le sezioni coniche è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro, cioè $= \frac{N^3}{p^2}$; e siccome nella parabola $N = \sqrt{(y^2+p^2)} = \sqrt{(p^2+2ex)}$, e però il raggio osculatore $= \frac{p+2x}{p}\sqrt{(p^2+2px)}$; quindi viene, che supposto il grave partito dal vertice della parabola l' espressione $\frac{2h}{r}$ si cangia in $\frac{2px}{(p+2x)\sqrt{(p^2+2px)}}$, e questa uguagliata a $\frac{p}{\sqrt{(p^2+2px)}}$ somministra l' ugualtà $\frac{2x}{p+2x} = 1$, cioè $p = 0$, che è visibilmente assurdo. Dunque il grave discende per la convessità del canale parabolico senza mai distaccarsene, allorquando la discesa incomincia dal vertice. Altro assurdo parimente s' incontra quand' anche il grave incominci a discendere da un punto qualunque inferiore; e però dovunque incominci il suo moto, il corpo non abbandona mai il canale.

58. COROLL. V. Nell' ellisse conica coll' asse $= 2a$, col parametro $= 2p$ si ha l' equazione $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$; ond' è $ydy = \frac{(pa-px)\,dx}{a}$, $dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{(pa-px)^2} = \frac{(2a^2px - pax^2)\,dy^2}{(pa-px)^2}$,
$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - pax^2)\,dy^2}{(pa-px)^2}$,
$ds = \frac{dy\sqrt{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)}}{pa-px}$: conseguentemente $\frac{dy}{ds} = \frac{pa-px}{\sqrt{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)}}$. Siccome poi la normale $N = \frac{yds}{dx} = \frac{(pa-px)\,ds}{ady}$, se ne raccoglie il

raggio osculatore $r = \frac{N^3}{p^2} = \frac{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3p^2}$.
Dunque se il corpo incomincia a muoversi dal vertice dell' ellisse, sicchè sia $h = x$, nascerà

$$\frac{2h}{r} = \frac{2a^3p^2x}{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}$$, la qual espressione uguagliata al valore di $\frac{dy}{ds}$ somministra l'equazione $2a^3x = (a - x)(pa^2 - 2apx + 2a^2x + px^2 - ax^2)$, che si riduce alla cubica di questa forma $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$.
La radice di quest' equazione reperibile co' noti metodi rappresenta l' altezza dell' arco ellittico, descritto il quale, il corpo abbandona il canale. La stessa equazione cubica si ritrova anche quando l' asse verticale dell' ellisse è il minore, e il corpo parte dal vertice di quest' asse, col solo divario, che in questo caso, a indica il semiasse minore, p il semiparametro di quest' asse, x l' ascissa del medesimo.

59. COROLL. VI. Per l' iperbola conica con un procedere affatto simile al precedente s' incontra l' equazione cubica

$x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{p+a} + \frac{pa^3}{p+a} = 0$, la di cui radice x sarà l' ascissa dell' arco iperbolico, descritto il quale il corpo, che incomincia a discendere dal vertice, si distacca dalla convessità del canale iperbolico. Ma qui un tal distacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola; avvegnachè essendo positivi tutti i termini della predetta equazione il valor reale di x non può essere che negativo; il che, nell' ipotesi in cui siamo, è un assurdo. Dunque il grave, che discende per la convessità d' un canale iperbolico, resta sempre unito al canale anche protratto in infinito senza scostarsene mai. Non è mestieri di far vedere, essendo troppo facile, che ciò accade anche quando il corpo comincia a discendere da qualunque punto più basso del vertice.

60. COROLL. VII. Sia la cicloide *CAD* (*fig.* V.) la di cui

equazione è $dy = dx\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$, preso r pel semidiametro del cerchio generatore $AOBS$. Qui si ha $ds^2 = dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{dx^2(2r-x)}{x} = \frac{2rdx}{x}$, $ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}}$, $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$.
Si sa di più, che il raggio dell' evoluta della cicloide per qualunque punto indefinito M è il doppio della corda corrispondente BO del cerchio generatore, cioè $r = 2\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}$. Quindi, essendo $h = x$, e però $\frac{2h}{r} = \frac{x}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$, risulta pel nostro intento

$\frac{x}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$, e per fine $x = r$. Dunque il grave, che parte dalla quiete dal vertice della cicloide giù per la sua convessità scanalata, se ne distacca dopo essere arrivato al punto, che resta sotto il vertice un semidiametro del cerchio generatore. Se il grave incomincia a discendere da un punto F sotto il vertice, posta $AE = a$, il valore di $\frac{2h}{r}$ si cangia in $\frac{x-a}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$, e dall' equazione $\sqrt{\frac{2r-x}{2r}} = \frac{x-a}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$ si raccoglie $2r - x = x - a$, cioè $EN = NB$, $EN = \frac{1}{2}EB$. Dunque, da qualsivoglia punto del canale cicloidale incominci il moto, il grave si distacca sempre dopo aver percorso un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello stesso arco continuato fino alla base orizzontale della cicloide.

61. COROLL. VIII. Suppongasi, che la figura del canale sia quella d' una parabola qualunque di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2. In quest' ipotesi si ha $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 + m^2y^{2m-2}dy = dy^2\left(1 + m^2x^{(2m-2):m}\right)$; e però

$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})}}$. Ora è facile il vedere, che per le parabole superiori il raggio dell' evoluta, ovvero $r = \frac{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}{m(m-1)x^{(m-2):m}}$. Sicchè posta l' altezza dovuta alla velocità, cioè $h = x$ nell'ipotesi, che il grave parta dal vertice, risulta $\frac{2h}{r} = \frac{2m(m-1)x^{(2m-2):m}}{(1+m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}$. Laonde dovendo essere nel caso del distacco $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$, sarà $1 + m^2 x^{(2m-2):m} = 2m(m-1)x^{(2m-2):m}$; e perciò $x^{(2m-2):m} = \frac{1}{m(m-2)}$, e finalmente $x = (\frac{1}{m(m-2)})^{m:(2m-2)}$. Dunque ne' canali parabolici di grado superiore al secondo il grave, che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico si distacca allorquando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $(\frac{1}{m(m-2)})^{m:(2m-2)}$; la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo. Che se il grave, in vece di spiccarsi dalla sommità del canale, partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale, che passa per la sommità, sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere questa equazione $x^{(2m-2):m} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{(m-2):m} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

62. COROLL. IX. Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, facilmente si trova

$ds = \frac{dy}{n} \surd(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})$, $\frac{dy}{ds} = \frac{n}{\surd(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}$,

il raggio d'osculo $r = \frac{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}{mn(m-n)x^{(m-2n):m}}$. Supposto pertanto, che il grave incominci a rotolare dalla sommità, sicchè sia $b = x$, si ha $\frac{2b}{r} = \frac{2mn(m-n)x^{(2m-2n):m}}{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}$; e conseguentemente dovendo essere pel caso del distacco $\frac{2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, risulta $n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m} = 2m(m-n)x^{(2m-2n):m}$, e quindi per fine $x = \left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{m:(2m-2n)}$, che è l' altezza di quell' arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale. Qualora poi il grave incominci il suo moto da un altro punto più basso del vertice, e sia a la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell' equazione $x^{(2m-2n):m} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{(m-2n):m} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice sottraendo la quantità a si ottiene l' altezza dell' arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

63. COROLL. X. Sia *OBS* (*fig.* VI.) la logaritmica situata in un piano verticale, col suo asintoto *MN* al di sopra di essa ed orizzontale. Si supponga la sottangente costante $= 1$, e la *FB* normale all' asintoto ed uguale alla sottangente si produca indefinitamente in *P*, e si prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. La natura di questa curva somministra l' equazione transcendente $1 + x = e^y$, essendo e il numero, il di cui logaritmo iperbolico o naturale è l' unità. Da questa equazione si ricava subito $dx = e^y dy$, $dx^2 = (1+x)^2 dy^2$, $ds^2 = (1 + (1+x)^2) dy^2$,

$ds = dy \surd(1 + (1+x)^2)$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\surd(1 + (1+x)^2)}$. Essendo poi $dy = \frac{dx}{1+x}$, e supposto dx costante, avendosi

$-dxddy = \frac{dx^3}{(1+x)^2}$, ſe nella formola $\frac{ds^3}{-dxddy}$ del raggio oſculatore r ſi ſoſtituiſcono queſti valori, ſi ritrova

$$r = \frac{dy^3 (1+x)^2 \left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = \frac{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+x}.$$

Sicchè nel ſuppoſto, che il grave incominci a rotolare giù per la conveſſità della curva dal punto B ſino al punto indefinito S, onde ſi abbia $h = BI = x$, ſi ottiene $\frac{2h}{r} = \frac{2x(1+x)}{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, che pareggiato con $\frac{dy}{ds}$ offre per riſultato $x = \sqrt{2}$. Dunque il corpo che incomincia la ſua diſceſa dal punto B, che chiameremo vertice, abbandona la curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza è la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente. Qualora poi il corpo parta da un punto inferiore a B, e la diſtanza d' un tal punto dalla retta orizzontale menata per B ſia $= a$, appariſce $h = x - a$, e ſi preſenta l' equazione $(2x - 2a)(1+x) = 1 + (1+x)^2$, cioè $x^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, la quale ſomminiſtra $x - a = \sqrt{(a^2 + 2a + 2)} = \sqrt{\left(1 + (a+1)^2\right)}$. Di qui è evidente, che dovunque incominci ſotto il vertice la diſceſa del grave lungo la conveſſità della logaritmica, eſſo ſi ſcoſta dalla curva dopo aver percorſo un arco, che ha per altezza l' ipotenuſa d' un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio di detto arco dalla orizzontale menata pel vertice.

64. COROLL. XI. Se vuolſi (*fig.* VII.) che il corpo partendo dal vertice A diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della ciſſoide ACO riferita all' aſſe AM parallelo all' aſintoto verticale FN, chiamate al ſolito x, y le coordinate AB, BC, ed a il ſemidiametro AP del cerchio generatore, è manifeſto, che ſi ha l' equazione $x = \frac{y^2}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$, e però

$$dx = \frac{2ydy\sqrt{(2ay - y^2)} - \frac{ay^2dy + y^3dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}}{2ay - y^2} = \frac{(3a - y)y^2dy}{(2ay - y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(3a-y)^2 y^4 dy^2}{(2ay-y^2)^3} + dy^2 = \frac{(8a^3y^3 - 3a^2y^4)dy^2}{(2ay-y^2)^3}$$

$$= \frac{a^2y^3(8a-3y)dy^2}{(2ay-y^2)^3}, ds = \frac{ay^{\frac{3}{2}}(8a-3y)^{\frac{1}{2}}dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds^3 = \frac{a^3y^{\frac{9}{2}}(8a-3y)^{\frac{3}{2}}dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{9}{2}}}$$. Parimenti essendo

$$dy = \frac{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}dx}{(3ay^2-y^3)}$$, si avrà

$$ddy = \Big\{ dxdy\big((3a-3y)(3ay^2-y^3)\sqrt{(2ay-y^2)}$$

$$-(6ay-3y^2)(2ay-y^2)\sqrt{(2ay-y^2)}\big)\Big\} : (3ay^2-y^3)^2$$

$$= \Big\{ dxdy\big((3a-3y)(3a-y)$$

$$-(6a-3y)(2a-y)\big)\sqrt{(2ay-y^2)}\Big\} : (3a-y)^2y^2$$

$$= -\frac{3dxdya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$$. Laonde

$$-dxddy = \frac{3dx^2dya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$$, e sostituendo il valore di

dx^2, nasce $-dxddy = \frac{3a^2y^2dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{5}{2}}}$. Pertanto il raggio osculatore $r = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{ay^{5:2}(8a-3y)^{3:2}}{3(2ay-y^2)^2}$; e poichè il valore di $\frac{dy}{ds}$ dee nella nostra ipotesi uguagliare quello di $\frac{2x}{r}$, fatte le opportune sostituzioni in quest' espressione si ritrova

$$\frac{(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a-3y)^{1:2}} = \frac{6(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a-3y)^{3:2}}$$, e quindi $\frac{6y}{8a-3y} = 1$,

cioè in fine $y = \frac{8}{9}a$. Dunque il corpo che partendo dal vertice discende per la convessità della cissoide, se ne distacca dopo aver trascorso un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore. Qualora poi il corpo parte da un punto inferiore al vertice A, e distante dall' orizzontale AF d' una data quantità b, se ne inferisce $\frac{2x - 2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, e fatte le debite sostituzioni, si ha $\frac{6(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a - 3y)^{3:2}}$ $- \frac{6b(2ay - y^2)^2}{ay^{5:2}(8a - 3y)^{3:2}} = \frac{(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a - 3y)^{1:2}}$, cioè $\frac{6y}{8a - 3y}$ $- \frac{6b\sqrt{(2ay - y^2)}}{y(8a - 3y)} = 1$, ovvero $6y^2 - 6b\sqrt{(2ay - y^2)}$ $= 8ay - 3y^2$, dalla quale per ultimo si ricava la seguente equazione di terzo grado $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \left(\frac{64a^2 + 36b^2}{81}\right)y$ $- \frac{8ab^2}{9} = 0$. La radice di tale equazione dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di cissoide, dal quale se si sottrae l' arco compreso fra il vertice e il principio del moto si ha l' arco ricercato, al di cui termine giunto che sia il corpo, abbandona la cissoide.

65. COROLL. XII. Per tutte le ellissi, ed iperbole superiori si ha l' equazione generalissima $y^{m+n} = fx^m(a \mp x)^n$, dove a rappresenta l' asse trasverso, f una grandezza costante. Questa equazione si riduce all' altra $y = gx^{m:(m+n)}(a \mp x)^{n:(m+n)}$ mettendo g in luogo di $f^{1:(m+n)}$. Quindi si avrà

$$dy = \frac{m}{m+n}gx^{-n:(m+n)}dx(a \mp x)^{n:(m+n)}$$

$$\mp \frac{n}{m+n}gx^{m:(m+n)}dx(a \mp x)^{-m:(m+n)} = \frac{mg(a \mp x)^{n:(m+n)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}}dx$$

$$\mp \frac{ngx^{m:(m+n)}dx}{(m+n)(a \mp x)^{m:(m+n)}} = \frac{mg(a \mp x)dx \mp ngxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

mgadx

$$= \frac{mgadx \mp (m+n)gxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}},$$

$$dy^2 = \frac{(m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2)dx^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}}, \sqrt{(dy^2+dx^2)}$$

$$= dx\sqrt{\left(1 + \frac{m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}}\right)}$$

$$= \frac{dx\sqrt{((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

$= ds$. Prendo ora il differenziale di dy, ed ottengo

$$ddy = \Big\{ \mp (m+n)^2gx^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}dx^2$$

$$- (mga \mp (m+n)gx)\big(nx^{-m:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}$$

$$\mp mx^{n:(m+n)}(a \mp x)^{-n:(m+n)}\big)dx^2 \Big\} : ((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)})$$

$$= \Big\{ \mp (m+n)^2gx(a \mp x) - (mga \mp (m+n)gx)(n(a \mp x) \mp mx) \Big\} dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$$= \Big\{ (\mp m^2 \mp 2mn \mp n^2)(a \mp x)gx$$

$$+ (\pm mgx \pm ngx - mga)(na \mp nx \mp mx) \Big\} dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+n):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$$= \frac{-mnga^2dx^2}{(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}}.$$ Sarà dunque, fatte le opportune sostituzioni, il raggio r dell' evoluta, ossia

$$\frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2)^{3:2}}{mn(m+n)ga^2x^{(n-m):(m+n)}(a \mp x)^{(m-n):(m+n)}}.$$

Laonde supposto, che il corpo incominci a discendere lungo la convessità della curva dalla sommità, sicchè sia $h = x$, l' equazione $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ dopo le debite sostituzioni si convertirà in

$$\frac{mga \mp (m+n)gx}{\sqrt{\left((m+n)^2 x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)}}$$

$$= \frac{2mn(m+n)ga^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}}{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)^{3:2}},$$

donde si trae $2mn(m+n)a^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}$

$= \left(ma \mp (m+n)x\right)\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)}\right.$

$\left. + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)$. La radice di quest' ultima equazione darà l' altezza dell' arco ellittico, o iperbolico, percorso il quale, il corpo partito dalla sommità abbandona le convessità della curva, e prosiegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge de' projetti.

66. COROLL. XIII. Sia l' iperbola equilatera *FOM* (*fig.* VIII.) fra gli asintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* sia verticale, *AB* orizzontale; e guidata pel vertice *O* la verticale *ON* parallela all' asintoto *AC*, si piglino in essa le ascisse *OH* x, e le ordinate normali *HE* y, e si ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS*, ovvero $SA = 1$. Per la nota proprietà dell' iperbola si ha l' equazione $(1+x)(1-y) = 1$; e però $1 - y = \frac{1}{1+x}$, $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$, $dy^2 + dx^2 = ds^2 =$ $\frac{dx^2\left(1+(1+x)^4\right)}{(1+x)^4}$, $ds = \frac{dx}{(1+x)^2}\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}$,

$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}}$. Inoltre $ddy = \frac{-2dx^2}{(1+x)^3}$,

$-dxddy = \frac{2dx^3}{(1+x)^3}$, $r = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}{2(1+x)^3}$. Dunque supposta $b = x$, sarà $\frac{2b}{r} = \frac{4x(1+x)^3}{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}$. Laonde dovendo essere $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$ nasce $\frac{1}{\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}} = \frac{4x(1+x)^3}{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}$, cioè $1 + (1+x)^4 = 4x(1+x)^3$, donde si trae l' equazione di quarto grado $x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 * - \frac{2}{3} = 0$. La radice pertan-

to di questa equazione darà ciò che si cerca, vale a dire l' altezza dell' arco iperbolico, dopo del quale il grave partito dalla sommità giù per la convessità dell' iperbola si porta fuori di essa, e prosiegue a muoversi ormai liberamente. Ogni qualvolta il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l' intervallo a dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quest' altra equazione biquadratica da risolversi

$$x^4 + \frac{(8-4a)}{3} x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \frac{2-4a}{3} = 0,$$ la di cui radice dà l' altezza di quell' arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza a, il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo si disimpegna dalla curva e prosiegue il suo cammino con moto libero.

67. COROLL. XIV. Avendo ritrovata nel Coroll. IV la parabola conica dotata della proprietà singolare, che il grave non si distacca mai dalla medesima nel discendere per la sua convessità da qualunque punto incominci il suo moto qualora ella sia situata coll' asse verticale; nasce ora la curiosità di sapere cosa sia per accadere al grave scorrente per la detta convessità ogni qualvolta la situazione della parabola giacente in un piano verticale sia coll' asse orizzontale. Tirisi adunque nella parabola ANM (*fig.* IX) coll' asse orizzontale MO dal punto dato A, da cui il grave incomincia a discendere, la verticale AB, a cui si riferiscono le coordinate ortogonali AF, FN, cioè x, y. Si dimostra facilmente, che chiamato p il parametro della parabola, b la data BM, e λ la $BA = \sqrt{bp}$ si ha l' equazione $py = 2\lambda x - x^2$. Quindi

$$dy = \frac{2\lambda dx - 2x dx}{p},\ dy^2 + dx^2 = ds^2 = \left(\frac{4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2}{p^2}\right) dx^2,$$

$$ds = \frac{dx}{p}\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}}.$$ Parimente $ddy = -\frac{2dx^2}{p}$;

$-dxddy = \frac{2dx^3}{p}$. Dunque $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$

$= \frac{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$. Fatta pertanto l' ipotesi, che il grave parta dal punto A, onde si abbia $h = x$, l' uguaglianza delle due espressioni $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ offre l' equazione

$$\frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}} = \frac{4p^2 x}{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{3:2}},$$

ovvero $(2\lambda - 2x)(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2) = 4p^2 x$, che si riduce alla cubica

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad - \frac{1}{4}\lambda p^2 \end{array}\right\} = 0$$

la di cui radice dà l'altezza dell'arco parabolico ricercato, sicchè il corpo discendendo pel convesso della curva se ne allontana allorchè giugne al termine di tal arco. Qualunque volta il grave parte da un punto più basso di A, e distante per l' intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A si trova l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda z^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad - \frac{1}{4}\lambda p^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}p^2 a \end{array}\right\} = 0,$$

e la radice di questa dà l' altezza dell' arco, dal quale sottratto l' arco di altezza a il residuo è appunto il ricercato.

Se nell' ipotesi della gravità costante si vuole collocato il corpo sulla convessità della parabola in un punto infinitamente distante dal vertice, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all' asse orizzontale acquisti un valore infinito, allora si fa manifesto, che nell' equazione

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad - \frac{1}{4}\lambda p^2 \end{array}\right\} = 0,$$

il valore della radice x non può essere che infinito, altrimenti verrebbe l' assurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l' infinito sarebbe uguale a zero. Essendo poi infinito il valore così di λ come

di x, svaniscono al confronto degli altri i due termini $\frac{3}{4}p^2x$ $-\frac{1}{4}\lambda p^2$, e resta $x^3 - 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^3 = 0$, che è visibilmente $(x - \lambda)^3 = 0$, e quindi $x = \lambda$. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dal vertice nella parabola verticalmente collocata ma coll' asse orizzontale, e discende per la convessità, descrive tutto l' arco infinito sino al menzionato vertice senza mai distaccarsi.

PROBLEMA XII. (*fig.* X.)

§. 68. *Ritrovare la linea* CMN *situata in un piano verticale, e riferita all' asse verticale* AB, *sulla quale collocato un grave in parte opposta all' asse, questo discenda per essa senza premerla per essere la pressione nata dalla gravità uguale dovunque alla forza centrifuga.*

SOLUZIONE.

L' ipotesi somministra l' equazione differenziale della curva $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$. Posto pertanto, che il grave incominci a discendere dal punto M più basso della sommità A dell' asse per l' intervallo $AO = a$, per modo che essendo $AR = x$ diventi $h = OR = x - a$, si otterrà $\frac{dy}{ds} = \frac{2x - 2a}{r}$; e perchè il raggio r dell' evoluta si fa essere $= \frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, nasce quindi $dy = \frac{-2(x-a)\,dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2}$. Prendo ora l' elemento ds, cioè $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ per costante, ed ho $\frac{dxddx + dyddy}{ds} = 0$,

ovvero $-dxddx = dyddy$, e di qui $-dyddx = \frac{dy^2 ddy}{dx}$. Ma $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; dunque sostituendo per $-dyddx$ il valore ritrovato, si deduce $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx^3}$, ovvero $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ds^2 ddy}{dx}$, cioè $\frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2} = \frac{ddy}{dx}$; e questo valore sostituito nell' espressione di dy, nasce $dy = \frac{-2(x-a)\,ddy}{dx}$, che separate le variabili diventa $\frac{ddy}{dy} = -\frac{dx}{2(x-a)}$. Ora si vede chiaro, che l' integrale di questa equazione è $\log. dy = -\frac{1}{2}\log. (x-a) + \log. cds$, essendosi presa per costante ds. Laonde passando da' logaritmi a' numeri si troverà $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, e quadrando $dy^2 = \frac{c^2(dx^2+dy^2)}{x-a}$; onde $(x-a)dy^2 - c^2dy^2 = c^2dx^2$, e finalmente $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x-a-c^2)}}$, ed integrando $y = 2c\sqrt{(x-a-c^2)} + \text{cost.}$ Suppongasi, che alla sommità A, quando $x = o$, sia $y = AC = b$, e nascerà cost. $= b - 2c\sqrt{(-a-c^2)}$. Perciò $y = b - 2c\sqrt{(-a-c^2)} + 2c\sqrt{(x-a-c^2)}$. A ritrovare poi la prima costante c ricorro all' equazione differenziale $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, dalla quale si ricava $c = \frac{dy}{ds}\sqrt{(x-a)}$; e siccome $\frac{dy}{ds}$ esprime il seno dell' angolo, cui la linea ricercata forma in qualsivoglia punto colla retta verticale, se un tal seno pel punto M quando $x = a$ si chiama ϕ, è manifesto provenire $c = \phi \times o = o$; e conseguentemente l' equazione alla linea cercata è $y = b$, che è quanto dire, che una tal linea è la retta verticale CS. Che

ſe il ſeno ϕ del predetto angolo ſi faceſſe corriſpondere non alla poſizione $x = a$, ma bensì ad $x = 0$, allora naſcerebbe $c = \phi\sqrt{-a}$, e però $y = b + 2\phi\sqrt{-a}\left(\sqrt{(x - a + \phi^2 a)} - \sqrt{(\phi^2 a - a)}\right) = b + 2\phi\left(\sqrt{(a^2 - a^2\phi^2 - ax)} - \sqrt{(a^2 - \phi^2 a^2)}\right) = b + 2\phi\sqrt{\left(a^2(1 - \phi^2) - ax\right)} - 2\phi\sqrt{\left(a^2(1 - \phi^2)\right)}$; dalla quale equazione ſi ſcorge, che dovendo eſſere $x > a$, oppure $= a$, il valore di y diventa immaginario, e il Problema impoſſibile ſintantochè ϕ perſiſte ad eſſere qualche coſa, ſiccome è altronde manifeſto; ma diventando $\phi = 0$, l' equazione alla linea cercata ſi cangia in $y = b$, cioè a dire la detta linea è una retta verticale, come dianzi. Il che ecc.

§. 69. Aggiungo per ultimo il Problema delle forze centrali ſecondo la Teoria Neutoniana trattato qui in una maniera particolare, dove qualche ripiego tenuto per giungere all' integrazione delle eſpreſſioni relative ai tempi potrebbe per avventura non eſſere inutile in qualche altra occaſione. Dalla ſoluzione del Problema ho ricavato ſpeditamente in tanti Teoremi tutte le proprietà più ſingolari ed eleganti del moto prodotto in virtù d' una forza acceleratrice variabile in ragione duplicata inverſa delle diſtanze dal centro della forza. Tutto ciò è qui ridotto ſotto un ſol punto di viſta, e immediatamente inferito dalla ſola ſoluzione del Problema fondamentale.

PROBLEMA.

Un mobile gettato da principio con una certa velocità di projezione viene obbligato a camminare per una via curvilinea QMT (fig. XI.) *da una forza acceleratrice, la quale lo ſpinge di continuo verſo un punto fiſſo* P *con una intenſità reciprocamente proporzionale al quadrato della diſtanza del corpo dal detto punto: ſi cerca la curva deſcritta* QMT.

SOLUZIONE.

Si guidi pel dato punto P una retta PS nel piano della trajettoria, e ſia M il luogo del mobile dopo un certo tempo t, e da M ſi conduca a PS come aſſe l' ordinata perpendicolare MN, e l' infinitamente proſſima mn, ſopra cui ſi ab-

bassi il perpendicolo Mr. Chiamato al solito x, y respettivamente le coordinate ortogonali PN, MN, v il raggio vettore PM, ϕ l' angolo MPS, convien riflettere, che il corpo, il quale si muove per la curva QM e descrive nell' istante dt l' archetto infinitesimo Mm, può considerarsi come animato da due moti, uno parallelo all' ascissa PN, l' altro all' ordinata NM, percorrendo col primo di questi due moti nello stesso istante dt la Mr ovvero dx, col secondo la rm, o dy, cioè i lati del rettangolo, di cui Mm è la diagonale, la velocità del primo moto sarà dunque $= \frac{dx}{dt}$, la velocità del secondo $= \frac{dy}{dt}$. Ora risolvendo la forza centrale, che spinge il corpo secondo MP, in due X, Y, quella parallela alle ascisse, questa alle ordinate, è manifesto, che dalla forza X viene ritardata la velocità $\frac{dx}{dt}$, e dalla Y viene sminuita la velocità $\frac{dy}{dt}$, e tali diminuzioni istantanee di velocità (preso dt per costante) sono $\frac{-ddx}{dt}$, e $\frac{-ddy}{dt}$. Perlochè il noto principio Dinamico, che la forza acceleratrice o ritardatrice moltiplicata per l' istante è uguale alla variazione istantanea della velocità, somministra le due equazioni $\frac{-ddx}{dt^2} = X$, $\frac{-ddy}{dt^2} = Y$. Suppongasi in oltre, che la forza centrale in una data distanza r dal punto P sia $= R$, sicchè risulti $\frac{Rr^2}{v^2}$ per la forza in M. Quindi è evidente, essere $X = \frac{Rr^2 \cos. \phi}{v^2} = \frac{-ddx}{dt^2}$, $Y = \frac{Rr^2 \text{sen.} \phi}{v^2} = \frac{-ddy}{dt^2}$. Se pertanto si mena l' altro raggio vettore Pm, e coll' intervallo PM si descrive l' archetto circolare Mg, riesce $mg = dv$, $Mg = v d\phi$, $Mm^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 d\phi^2$, $v^2 = x^2 + y^2$; e quest' ultima equazione

zione due volte differenziata diventa $vddv + dv^2 = xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = xddx + yddy + dv^2 + v^2 d\phi^2$, cioè $xddx + yddy = vddv - v^2 d\phi^2$, ovvero $\frac{xddx}{dt^2} + \frac{yddy}{dt^2} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$

Ma $\frac{xddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 x \operatorname{cos}. \phi}{v^2} = \frac{-Rr^2 \operatorname{cos}. \phi^2}{v}$ (poichè $\frac{x}{v} = \operatorname{cos}. \phi$);

ed $\frac{yddy}{dt^2} = -\frac{Rr^2 y \operatorname{sen}. \phi}{v^2} = -\frac{Rr \operatorname{sen}. \phi^2}{v}$ (giacchè $\frac{y}{v} = \operatorname{sen}. \phi$).

sicchè $\frac{xddx + yddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$, ovvero

$\frac{ddv - vd\phi^2}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v^2}$ (A). Siccome poi si ha $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}. \phi$,

e differenziando $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\phi}{\operatorname{cos}. \phi^2}$, cioè $xdy - ydx = \frac{x^2 d\phi}{\operatorname{cos}. \phi^2}$, ed è $\frac{x}{\operatorname{cos}. \phi} = v$, perciò si ha $xdy - ydx = v^2 d\phi$, ovvero $vd\phi = \frac{xdy}{v} - \frac{ydx}{v} = dy \operatorname{cos}. \phi - dx \operatorname{sen}. \phi$, e questa equazione differenziata si cangia in $ddy \operatorname{cos}. \phi - ddx \operatorname{sen}. \phi - d\phi (dy \operatorname{sen}. \phi + dx \operatorname{cos}. \phi) = vdd\phi + dvd\phi$, ossia $ddy \operatorname{cos}. \phi - ddx \operatorname{sen}. \phi = vdd\phi + dvd\phi + d\phi (dy \operatorname{sen}. \phi + dx \operatorname{cos}. \phi)$, e se in questa si sostituisce il valore ricavato dal differenziare l'equazione $v^2 = x^2 + y^2$, vale a dire $vdv = xdx + ydy$ oppure $dv = \frac{xdx}{v} + \frac{ydy}{v} = dx \operatorname{cos}. \phi + dy \operatorname{sen}. \phi$, ne deriva $ddy \operatorname{cos}. \phi - ddx \operatorname{sen}. \phi = vdd\phi + 2dv\, d\phi$. Ora essendosi già trovate le due equazioni $ddy = \frac{-Rr^2 dt^2 \operatorname{sen}. \phi}{v^2}$,

$ddx = \frac{-Rr^2 dt^2 \operatorname{cos}. \phi}{v^2}$, se si moltiplica la prima per $\operatorname{cos}. \phi$ la seconda per $\operatorname{sen}. \phi$ sottraendola dalla prima, si ottiene $ddy \operatorname{cos}. \phi - ddx \operatorname{sen}. \phi = 0$; e quindi $vdd\phi + 2dvd\phi = 0$, e questa moltiplicata per v, ed integrata diventa $v^2 d\phi = c^2 dt$, essendo c^2 una costante arbitraria. Preso poi di qui il valore

$dt^2 = \frac{v^4 d\phi^2}{c^4}$, e surrogato nell' equazione (A) nasce $ddv - v d\phi^2 = \frac{-Rr^2 v^2 d\phi^2}{c^4} = \frac{-v^2 d\phi^2}{b}$, posto $b = \frac{c^4}{Rr^2}$. Dunque ($bv - v^2$) $d\phi^2 = bddv$, oppure $d\phi^2 = \frac{bddv}{v(b-v)}$. Per integrale di quest' ultima equazione si prenda $\frac{bdv}{v(b-v)} = Td\phi$, essendo T una funzione variabile da definirsi; e il differenziale sarà $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = Tdd\phi + dTd\phi$. Siccome pertanto si è trovato $vdd\phi + 2dvd\phi = 0$, cioè $dd\phi = \frac{-2dvd\phi}{v}$, se si sostituisce questo valore nell' equazione precedente, essa diviene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2Tdvd\phi}{v} + dTd\phi$, ed in questa sostituendo il valore assunto di $Td\phi = \frac{bdv}{v(b-v)}$), si ottiene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2bdv^2}{v^2(b-v)} + dTd\phi$, ovvero $\frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = dTd\phi$. Ma si è trovato $\frac{bddv}{v(b-v)} = d\phi^2$, e $\frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = T^2 d\phi^2$. Dunque $d\phi^2 + T^2 d\phi^2 = dTd\phi$, e quindi $d\phi = \frac{dT}{1+T^2}$; e questa equazione integrata dà arc. tang. $T = \phi + \beta$, preso per β un angolo costante da determinarsi. Da quest' integrale si deduce subito $T = \text{tang.} (\beta + \phi)$ e $Td\phi = d\phi\, \text{tang.}(\beta + \phi) = \frac{bdv}{v(b-v)} = \frac{dv}{v} + \frac{dv}{b-v}$, e nuovamente integrando nasce finalmente $-\log. \cos. (\beta + \phi) = \log. v - \log. (b - v) + \log. e$, ovveramente $\log. e + \log.$

cos. $(\beta + \phi) = \log. (b - v) - \log. v$. Dunque per ultimo paſſando dai logaritmi ai numeri, riſulta $e \cos. (\beta + \phi) = \frac{b - v}{v}$, e conſeguentemente $v = \frac{b}{1 + e \cos. (\beta + \phi)}$. Ora queſta equazione al raggio vettore della trajettoria ricercata appartiene notoriamente ad una Sezione Conica di cui il punto P è il fuoco, b il ſemiparametro dell' aſſe principale, e l' eccentricità oſſia la diſtanza tra il centro e il fuoco diviſa pel ſemiaſſe principale, ed è riſpettivamente una parabola, un' elliſſe, o un' iperbola ſecondo i tre caſi, 1°. di $e = 1$, 2°. di $e < 1$, 3°. di $e > 1$. Il che era ecc.

70. Rimane ora a determinare il preciſo valore delle coſtanti arbitrarie c^2, β, e introdotte nelle integrazioni. A tal effetto, ſi chiami u la velocità del mobile nel punto M, e ds l' archetto Mm, ſicchè ſia $u = \frac{ds}{dt}$; e ſi ſupponga, che il corpo da principio ſia ſtato lanciato dal punto dato Q poſto ad una diſtanza nota f dal centro P della forza con una velocità iniziale o di projezione $= h$, e che quivi l' angolo fatto dal raggio vettore f colla direzione della projezione, o colla tangente della curva ſia $= \alpha$. Con ciò è manifeſto, che nel punto iniziale Q ſi ha $\frac{fd\phi}{ds} = \text{ſen.}\ \alpha$, $ds = \frac{fd\phi}{\text{ſen.}\ \alpha}$; ed inoltre $u = \frac{ds}{dt} = \frac{fd\phi}{dt\ \text{ſen.}\ \alpha} = h$, onde $\frac{d\phi}{dt} = \frac{h\ \text{ſen.}\ \alpha}{f}$. Ma ſi è trovato $c^2 = \frac{v^2 d\phi}{dt}$; dunque ſoſtituendo i valori di $v^2 = f^2$, e di $\frac{d\phi}{dt} = \frac{h\ \text{ſen.}\ \alpha}{f}$ ſi ottiene la ricercata coſtante $c^2 = fh\ \text{ſen.}\ \alpha$.

71. Per ritrovare l' altra coſtante β, oſſervo, che l' equazione differenziale $Td\phi = \frac{bdv}{v(b-v)}$ dà $T = \frac{bdv}{v(b-v)d\phi}$, dove $\frac{vd\phi}{dv}$ eſprime la tangente dell' angolo fatto dal raggio vettore coll' elemento della curva, ovvero colla ſua tangente, ſicchè

nel punto iniziale $\mathfrak{Q}$ diviene $\frac{v d\phi}{dv} = \text{tang.}\,\alpha, v = f$, e conseguentemente $T = \frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}$. Laonde arc. tang. T $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\alpha}\right) = \beta + \phi$. Se pertanto nel detto punto $\mathfrak{Q}$ l' angolo ϕ diventa uguale ad un angolo noto Δ, ne deriva il valore ricercato di $\beta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $- \Delta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha} - \text{tang.}\,\Delta\right) : \left(1 + \frac{b\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b - (b-f)\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha + b\,\text{tang.}\,\Delta}\right)$

72. Per ciò che riguarda l' eccentricità e, essendosi trovata l' equazione della trajettoria $v = \frac{1}{1 + e\,\text{cos.}\,(\beta + \phi)}$ questa somministra $e = \frac{b - v}{v\,\text{cos.}\,(\beta + \phi)}$; e però, diventando nel punto iniziale $\mathfrak{Q}$ della curva $v = f$, $\phi = \Delta$, nasce $e = (b - f) : (f\,\text{cos.}\,(\beta + \Delta))$. Siccome poi si è trovato $\beta + \Delta$ $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. sec.}\left(\frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. cos.}\left(\frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}\right)$; e quindi cos. $(\beta + \Delta)$ $= \frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}$: risulta finalmente

$$e = \frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}{f\,\text{tang.}\,\alpha}.$$

73. Per indagare presentemente i varj accidenti del moto per la trajettoria già ritrovata, incomincio ad osservare, che la precedente equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ si riduce all' altra

$\frac{\frac{1}{2} v^2 d\phi}{dt} = \frac{1}{2} c^2$, nella quale essendo $\frac{1}{2} v^2 d\phi$ uguale all' ajuola *MPm* della curva, si vede tosto il rapporto costante dell'elemento dell' area all' istante, in cui è descritto, e ciò succedendo in tutti gl' istanti d'un dato tempo qualunque, ne discende immediatamente il seguente

TEOREMA I.

Le aree comprese da due raggi vettori e dall' arco della trajettoria sono proporzionali al tempo, cui il mobile consuma a percorrer quell' arco.

74. Guidata la tangente *MO*, e ad essa la normale $PO = p$, è cosa evidente, che l' ajuola *PMm* ha per valore tanto $\frac{1}{2} v^2 d\phi = \frac{1}{2} c^2 dt$, quanto $\frac{1}{2} pds$; e però si ha $c^2 dt = pds$. Ma $u = \frac{ds}{dt}$, ovvero $udt = ds$. Dunque $c^2 dt = pudt$, ossia $u = \frac{c^2}{p}$, e quindi il

TEOREMA II.

La velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è in ragione inversa della normale condotta dal fuoco alla tangente della curva in quel punto.

75. L' equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ dà $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c^2}{v^2}$. Ora $\frac{d\phi}{dt}$ esprime la velocità angolare del mobile; ne viene adunque il

TEOREMA III.

La velocità angolare del corpo nella trajettoria seguita la ragione inversa del quadrato della sua distanza dal centro della forza, ovvero del fuoco.

76. Per determinare poi la misura precisa della velocità *u* del corpo in qualunque punto della curva, si consideri, che

essendo $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, si ha per la differenziazione $udu = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2}$, e poichè si è trovato $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \operatorname{cos}.\phi}{v^2}$, $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \operatorname{sen}.\phi}{v^2}$, se si moltiplica la prima di queste equazioni per dx, la seconda per dy, ne deriva $\frac{dxddx + dyddy}{dt^2} = udu = \frac{-Rr^2(dx \operatorname{cos}.\phi + dy \operatorname{sen}.\phi)}{v^2}$ $= \frac{-Rr^2 dv}{v^2}$. Laonde integrando si ottiene $u^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{cost.}$ La costante di quest' integrale si ritrova con avvertire, che quando diviene $v = f$, la velocità u si cangia nella velocità iniziale o di projezione h, il che dà cost. $= h^2 - \frac{2Rr^2}{f}$: e quindi $u^2 = h^2 - 2Rr^2(\frac{1}{f} - \frac{1}{v})$. Ed ecco il

TEOREMA IV.

La misura assoluta della velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è uguale all' espressione

$$\sqrt{(h^2 - 2Rr^2(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}))}.$$

76. Ritrovata l' espressione della velocità in qualsivoglia punto della curva, è facile ora il passaggio a determinare que' punti, ne' quali la velocità del mobile è la *massima*, o la *minima* di tutte le altre. Basta uguagliare a zero il differenziale della detta espressione, e da ciò deriva

$$d.\sqrt{(h^2 - 2Rr^2(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}))} = \frac{-Rr^2 dv}{v^2\sqrt{(h^2 - 2Rr^2(\frac{1}{f} = \frac{1}{v}))}} = 0,$$ vale a dire $-\frac{dv}{v^2} = d.\frac{1}{v} = 0$. Ma già si è veduto essere

$v = \frac{b}{1 + e \operatorname{cof.} (\beta + \phi)}$. Per confeguenza farà $d . \frac{1}{v}$ $= d . \left(\frac{1 + e \operatorname{cof.} (\beta + \phi)}{b} \right) = - e d\phi \operatorname{fen.} (\beta + \phi) = 0$. Dal che fi deduce tanto $\beta + \phi = 0$, quanto $\beta + \phi = 180°$. Di qui

TEOREMA V.

La maffima e la minima velocità del mobile nella trajettoria da effo percorfa corrifpondono alle due eftremità dell' affe principale, offia alle due apfidi ima, e fomma.

77. Se un altro corpo follecitato verfo il punto fiffo P da quella fteffa forza, che accompagna il mobile nella trajettoria, cafca in linea retta verfo P, e giunto ad una diftanza da P, la qual fia uguale al raggio vettore v, acquifta ivi una velocità $= u'$, è manifefto che farà $du' = \frac{Rr^2 dt}{v^2}$, ed effendo $u'dt$ $= - dv$, cioè $dt = \frac{-dv}{u'}$, nafcerà $u'du' = \frac{-Rr^2 dv}{v^2}$, il di cui integrale è $u'^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{coft.}$ Perciò fuppofto, che ad una diftanza nota f dal centro della forza la velocità u' diventa uguale ad una velocità data h', fi deduce coft. $= 'h^2 - \frac{2Rr^2}{f}$, e confeguentemente $'u^2 = 'h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right)$, ed $u' = \sqrt{\left('h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v} \right) \right)}$. Da ciò apparifce $u' = u$ allorchè $h' = h$, vale a dire il

TEOREMA VI.

Il mobile ha in ogni punto della fua trajettoria quella velocità che avrebbe un altro corpo il quale fi trovaffe alla fteffa diftanza dal centro della forza, verfo cui difcendeffe in linea retta, fupponendo femplicemente, che effo abbia avuto una volta

la medesima velocità del primo ad uguale distanza dal centro.

78. Fingasi ora, che il mobile dal punto della trajettoria, in cui si trova, caschi lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e venga sollecitato dalla stessa forza centripeta, la quale però rimanga costante per tutta la caduta: in questo supposto si scorge chiaramente che chiamato z lo spazio descritto dal corpo nella caduta lungo il raggio vettore v verso il centro, u'' la velocità da esso acquistata alla fine di tale spazio, si ricava l'equazione $u''du'' = \frac{Rr^2dz}{v^2}$, e mediante l'integrazione $\frac{2Rr^2z}{v^2} = u''^2$ senza costante da aggiungersi, giacchè si annullano insieme z, ed u''. Se pertanto si suppone che la velocità u'' acquistata dal mobile nella caduta sia uguale alla velocità u del medesimo nella trajettoria, siccome $u = \frac{c^2}{p}$, sarà parimente $u''^2 = \frac{c^4}{p^2} = \frac{2Rr^2z}{v^2}$, ed essendo $c^4 = Rr^2b$, ne viene $\frac{2z}{v^2} = \frac{b}{p^2}$, ovvero $z = \frac{\frac{1}{2}bv^2}{p^2}$. Di qui

TEOREMA VII.

Cascando verso il centro della forza da qualunque punto della trajettoria il mobile sollecitato dalla forza centrale corrispondente al detto punto, la quale però rimanga costante per tutta la caduta, acquista la velocità, che esso aveva in quel punto della curva, dopo esser caduto per uno spazio, che è quarto proporzionale al quadrato della normale condotta dal centro della forza sulla tangente della trajettoria nel mentovato punto, al quadrato del raggio vettore, ed alla quarta parte del parametro dell' asse principale.

79. Cada ora lo stesso corpo verso il centro della forza lungo il raggio vettore, e si supponga, che la forza non rimanga più costante come nel Teor. prec.; ma varii durante la caduta in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro. In questa ipotesi essendo $\frac{Rr^2}{v^2}$ la forza centripeta nel

principio

principio della caduta, sarà essa, scorso lo spazio z, ovvero alla distanza $v-z$ dal centro, espressa da $\frac{Rr^2}{(v-z)^2}$. Laonde nominando u''' la velocità acquistata nel cadere per lo spazio z, si ottiene $\frac{Rr^2dz}{(v-z)^2}=u'''du'''$, il di cui integrale è $\frac{2Rr^2}{v-z}=u'''^2+\text{cost.}$ E poichè u''' e z svaniscono insieme, proviene cost. $=\frac{2Rr^2}{v}$; e conseguentemente $u'''^2=2Rr^2\left(\frac{1}{v-z}-\frac{1}{v}\right)=\frac{2Rr^2z}{v(v-z)}$. Perlochè supponendo $u''=u=\frac{c^2}{p}$, cioè $u'''^2=\frac{c^4}{p^2}=\frac{Rr^2b}{p^2}$, ne deriva $\frac{2z}{(v-z)v}=\frac{b}{p^2}$; e quindi $z=\frac{bv^2}{2p^2+bv}=\frac{bv}{\frac{2p^2}{v}+b}$. Dunque il

TEOREMA VIII.

Un corpo, che da qualunque punto della sua trajettoria cade lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e viene sollecitato durante la sua caduta dalla stessa forza variante in ragione duplicata inversa della distanza dal centro, acquista la stessa velocità, che compete al detto punto della trajettoria dopo aver trascorso uno spazio, il quale si ha, se dopo aver presa una terza proporzionale al raggio vettore, e alla normale si piglia una quarta proporzionale al doppio di quella congiunto col semiparametro, allo stesso semiparametro ed al raggio vettore.

80. Per ciò che spetta al tempo impiegato dal mobile a correre per un arco qualunque QM della trajettoria, basta ricorrere alla formola $dt=\frac{v^2d\phi}{c^2}=\frac{v^2d\phi}{bf\,\text{sen.}\,\alpha}=\frac{2PMm}{bf\,\text{sen.}\,\alpha}$, dalla quale mediante l'integrazione si ricava $t=\frac{2QPM}{bf\,\text{sen.}\,\alpha}$ senza costante perchè si annullano insieme t, e PQM.

81. Se ſi vuole l'eſpreſſione del tempo indipendentemente dall' aja QPM, ſi ſoſtituiſca nell'equazione $dt = \frac{v^2 d\phi}{c^2}$ il valore dianzi trovato di v^2, e ſi avrà $dt = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi))^2}$; onde integrando naſcerà $t = \frac{b^2}{c^2} \int \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi))^2}$. Per ritrovare il valore di queſta eſpreſſione integrale io aſſumo queſta equazione $\int \frac{d\phi}{(1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi))^2} = \frac{M \operatorname{ſen} (\beta + \phi)}{1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)}$ $+ N \int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)}$, dalla quale mediante la differenziazione ritraggo

$$\frac{Md\phi \operatorname{coſ.} (\beta + \phi) (1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)) + Med\phi \operatorname{ſen.} (\beta + \phi)^2}{1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)}$$

$+ \frac{Nd\phi}{1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)} =$ (riducendo allo ſteſſo denominatore)

$$\frac{Md\phi \operatorname{coſ.} (\beta + \phi) + Nd\phi + Ned\phi \operatorname{coſ.} (\beta + \phi) + Med\phi}{(1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi))^2}.$$ Laonde ſarà

$$\begin{array}{c} Md\phi \operatorname{coſ.} (\beta + \phi) + Md\phi \\ + Ncd\phi \operatorname{coſ.} (\beta + \phi) + Nd\phi = 0. \\ - d\phi \end{array}$$

Di qui ſi raccoglie $M = -Ne$, $N - Ne^2 = 1$, $N = \frac{1}{1 - e^2}$, $M = \frac{-e}{1 - e^2}$. Con ciò diventa

$$t = -\frac{b^2 e \operatorname{ſen.} (\beta + \phi)}{c^2 (1 - e^2)(1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi))}$$

$+ \frac{b^2}{c^2 (1 - e^2)} \int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{coſ.} (\beta + \phi)}$. Ridotta per tal modo l'integrazione a non dipendere ſe non dalla formola $\int \frac{d\phi}{1 + e \operatorname{coſ} (\beta + \phi)}$,

per conseguire il valore di questa pongo cos. $(\beta+\phi) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; e però sen. $(\beta+\phi) = \frac{2x}{1+x^2}$, $d\phi \cos.(\beta+\phi) = \frac{2dx(1-xx)}{(1+xx)^2}$, $d\phi = \frac{2dx}{1+xx}$. Sicchè si avrà $1+e\cos.(\beta+\phi) = \frac{1+e+(1-e)xx}{1+xx}$; e quindi

$$\int \frac{d\phi}{1+e\cos.(\beta+\phi)} = \int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}.$$

Ora quest' ultima espressione $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$ soggiace alle note regole d' integrazione delle frazioni razionali, e tre sono i casi che possono occorrere.

CASO I.

$e < 1$

82. In questo caso diventa $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2}{1+e}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{1+e}\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \times$$

$$\int \frac{dx\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}.\ \text{arc. tang.}\left(\frac{x\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\right)$$

$= \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}.\ \text{arc. tang.}\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$. Ma si trova

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-\cos.(\beta+\phi)}{1+\cos.(\beta+\phi)}\right)} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\beta+\phi) = \frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{1+\cos.(\beta+\phi)},$$

ed inoltre $2.\ \text{arc. tang.}\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2(1-e)x : \sqrt{(1-e^2)}}{1 - \frac{(1-e)^2 xx}{1-e^2}} \right)$$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2(1-e)x\sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2-(1-e^2)xx} \right) = \text{arc. tang.} \frac{2x\sqrt{(1-e^2)}}{1+e-(1-e)xx}$$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2\,\text{fen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{(1+e)(1+\text{cof.}(\beta+\phi))-(1-e)(1-\text{cof.}(\beta+\phi))} \right)$$

$= \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{fen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cof.}(\beta+\phi)} \right)$. Dunque ſi avrà

$$\frac{b^2}{c^2(1-e^2)} \int \frac{d\phi}{1+e\,\text{cof.}(\beta+\phi)} = \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{fen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cof.}(\beta+\phi)} \right)$ e per conſeguenza

$$t = -\frac{b^2 e\,\text{fen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e\,\text{cof.}(\beta+\phi))} + \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{fen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cof.}(\beta+\phi)} \right) + \text{coſt.}$ Sicchè ſuppoſto, che nel punto $\mathfrak{Q}$, da cui ſi vuol cominciare a contare il tempo, ſia $\phi = g$, ſi avrà per fine $t = \frac{b^2 e\,\text{fen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)(1+e\,\text{cof.}(\beta+g))}$

$$-\frac{b^2 e\,\text{fen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e\,\text{cof.}(\beta+\phi))} - \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{fen.}(\beta+g)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cof.}(\beta+g)} \right)$$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} . \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{fen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cof.}(\beta+\phi)} \right)$$

CASO II.

$e > 1$

83. In queſto ſecondo caſo ſi ſcrive $\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2dx}{1+e-(e-1)xx} = \frac{2dx:(1+e)}{1-\frac{(e-1)xx}{e+1}}$$

$$= \frac{2dx:(1+e)}{\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)} = \frac{dx:(1+e)}{1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$

$$+ \frac{dx:(1+e)}{1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$. Dunque integrando si avrà

$$\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} = \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(\frac{\sqrt{(e+1)}+x\sqrt{(e-1)}}{\sqrt{(e+1)}-x\sqrt{(e-1)}}\right)$$, e sostituito per x

il suo valore $\sqrt{\frac{1-\text{cos}.(\beta+\phi)}{1+\text{cos}.(\beta+\phi)}}$, nasce $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} . \log. \frac{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{cos}.(\beta+\phi)\right)}+\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{cos}.(\beta+\phi)\right)}}{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{cos}.(\beta+\phi)\right)}-\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{cos}.(\beta+\phi)\right)}} =$$

(moltiplicando sopra e sotto pel numeratore)

$$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log. \frac{e+\text{cos}.(\beta+\phi)+\text{sen}.(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos}.(\beta+\phi)}$$. Perlochè nasce $t = -\frac{b^2 e\,\text{sen}.(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos}.(\beta+\phi)\right)}$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos}.(\beta+\phi)+\text{sen}.(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos}.(\beta+\phi)} + \text{cost}.$$

Siccome poi svanisce t allorchè $\phi = g$, perciò ne deriva

$$\text{cost}. = \frac{b^2 e\,\text{sen}.(\beta+g)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos}.(\beta+g)\right)}$$

$$- \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos}.(\beta+g)+\text{sen}.(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos}.(\beta+g)}.$$

Dunque furrogato questo valore nell' espressione di t, nasce finalmente $t = \frac{b^2 e}{c^2(1-e^2)} \left(\frac{\text{sen.}(\beta+g)}{1+e\,\text{cos.}(\beta+g)} - \frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)} \right)$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos.}(\beta+\phi)+\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)}.$$

$$- \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos.}(\beta+g)+\text{sen.}(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+g)}$$

CASO III.

$$e = 1$$

84. Quest' ultimo caso non può trattarsi col metodo precedente, come apparisce dal valore infinito che acquistano i coefficienti indeterminati M, N. Siccome però $1+\text{cos.}(\beta+\phi) = 2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, così sarà $t = \frac{b^2}{c^2}\int \frac{d\phi}{4\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^4}$. Facendo pertanto $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\phi = \omega$, e perciò $d\phi = 2d\omega$, nasce $t = \frac{b^2}{2c^2}\int \frac{d\omega}{\text{cos.}\,\omega^4}$. Ma per le note regole d' integrazione de' monomj trigonometrici si ha $\int \frac{d\omega}{\text{cos.}\,\omega^4} = \frac{1}{3}.\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega^3} + \frac{2}{3}.\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega} = \frac{\text{sen.}\,\omega(1+2\,\text{cos.}\,\omega^2)}{3\,\text{cos.}\,\omega^3}$.

Dunque sostituendo ne verrà $t = \frac{b^2}{2c^2}.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3} + \text{cost.}$ La costante si determina, come dianzi, con osservare che t diventa zero allorchè ϕ si cangia in g; il che dà cost. $= \frac{-b^2}{2c^2}.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+g)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+g)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+g)^3}$. Perlochè risulta $t = \frac{b^2}{2c^2}.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}$

$$-\frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\beta+g)\left(1+2\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\beta+g)^2\right)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(\beta+g)^3}.$$

85. Si può altrimenti ritrovare il valore di t in questo caso con far uso della già praticata sostituzione di $\text{cos.}(\beta+\phi)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; poichè si avrà $d\phi=\frac{2dx}{1+xx}$, ed $1+\text{cos.}(\beta+\phi)=\frac{2}{1+xx}$, e perciò $\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}=\frac{1}{2}dx(1+xx)$. Laonde $\int\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}=\frac{1}{2}x$ $+\frac{1}{6}x^3=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)^3}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^3}+\text{cost.}$

$$=\frac{\text{sen.}(\phi+\beta)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(1-\text{cos.}(\beta+\phi)^2)}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^3}+\text{cost.}$$

$$=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(1-\text{cos.}(\beta+\phi))}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$$

$=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{3(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$ Da ciò si ricava

$$t=\frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}$$

$=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$; ed essendo

$\text{cost.}=-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+g)(2+\text{cos.}(\beta+g))}{(1+\text{cos.}(\beta+g))^2}$, se ne deduce finalmente $t=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}$

$-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+g)(2+\text{cos.}(\beta+g))}{(1+\text{cos.}(\beta+g))^2}$, la qual espressione, per essere $1+\text{cos.}(\beta+\phi)=2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, e $\text{sen.}(\beta+\phi)$

$= 2$ sen. $\frac{1}{2}(\beta + \phi)$ cos. $\frac{1}{2}(\beta + \phi)$, equivale manifestamente alla precedente $\frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{sen.} \frac{1}{2}(\beta + \phi)(1 + 2 \text{cos.} \frac{1}{2}(\beta + \phi)^2)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(\beta + \phi)^3}$

$$- \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{sen.} \frac{1}{2}(\beta + g)(1 + 2 \text{cos.} \frac{1}{2}(\beta + g)^2)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(\beta + g)^3}.$$

S c o l i o.

Da aggiungersi dopo il §. 53 della Memoria precedente.

Ne' seguenti Corollarj vengono dimostrati i Teoremi da me proposti nel I. Volume degli Atti della nostra Società sopra la *discesa de' Corpi per la convessità delle Curve*. Il celebre Sig. Abb. *Frisi* nel secondo tomo delle sue Opere stampate in Milano esponendo alcuni di questi miei Teoremi fa avvertire pag. 115. una discrepanza notabile fra le formole, che egli ottiene col suo metodo di dimostrare, ed i miei risultati. Ma una tal discrepanza deriva dal principio da esso quivi adottato, che la misura assoluta della forza centrifuga sia una lineetta terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore, e all' archetto della curva descritto in un dato istante; laddove all' opposto egli è incontrastabile, che per conseguire la vera misura della forza centrifuga convien sempre pigliare una terza proporzionale, non al diametro del cerchio osculatore, ma al semidiametro, e poi all' archetto della curva, che è quanto dire una lineetta doppia di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Frisi* viene proposta. In fatti o vuolsi concepire la curva come poligona infinitilatera, e però l' azione della forza centrifuga non rigorosamente continua, ma interrotta da un istante all' altro; o si vuole immaginare la curva come rigorosa, e quindi continua l' azione della forza centrifuga senza alcuna interruzione neppure istantanea. Nel primo supposto la misura della forza centrifuga è l' impulso istantaneo, che fa percorrere al corpo la lineetta compresa fra l' estremità del latercolo prolungato della curva e l' estremità del latercolo contiguo, e questa lineetta nel presente supposto è visibilmente terza proporzionale al semidiametro

metro del cerchio osculatore, e all' archetto. Nella seconda ipotesi della curva rigorosa, e dell' azione continua della forza centrifuga, la quale in conseguenza non opera per impulsi istantanei, ma con matematica continuità, la lineetta compresa fra le estremità della tangente della curva e dell' archetto è bensì terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore, e all' archetto; ma tal lineetta non può più prendersi per misura totale della forza centrifuga. Imperciocchè essa viene descritta in virtù della forza centrifuga, e della sua azione continua e invariata pel dato istante con moto equabilmente accelerato, e perciò non essa linea semplicemente, ma il doppio di lei dee rappresentare l'effetto intero della forza centrifuga in quell' istante, cioè la velocità generata dalla forza nella durata dell' istante. Conseguentemente anche nel secondo supposto la misura totale e assoluta della forza centrifuga è indubitatamente il doppio di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Frisi* viene assegnata.

Dopo ciò sarebbe inutile, che io qui annoverassi a questo illustre Geometra i molti e grandi assurdi, che derivano dal suo principio, essendo persuaso, che una passeggera riflessione sull' argomento controverso basterà per fargli comprendere gl' inconvenienti del suo assunto.

SOPRA LE SERIE

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella R. Univerſità di Pavia.

ARTICOLO I.

Dell' uſo del Calcolo Integrale delle equazioni lineari per ſommare alcune ſerie traſcendenti.

I Moderni Analiſti ſi ſono a gara eſercitati nel perfezionare ed eſtendere la teoria delle equazioni differenziali lineari, proponendo varj metodi più o meno ſemplici e generali per aſſegnare i loro integrali completi; ed è già noto, che uno de' metodi più ingegnoſi per conſeguir queſt' intento è quello di aſſumere un *integrale particolare*, e di ricavarne poſcia mediante gli artifizj e ripieghi, che l' Analiſi somminiſtra, la vera forma dell' *integrale completo*. Supponendo io noti pertanto i fondamenti di queſto ramo di Calcolo Integrale mi reſtringo nel I. Articolo di queſta Memoria a moſtrar l' uſo, che quindi può trarſi per rinvenire la ſomma di alcune ſerie traſcendenti, alcune delle quali aſſoggettate agl' ingegnoſi metodi di *Leon. Eulero*, e del Sig. Cav. *Lorgna* eſiggerebbero per ſommarſi una lunga e tortuoſa complicazione di calcolo, ed ancor dopo queſto preſenterebbero riſultati aſſai compoſti, e biſognoſi di nuove riduzioni e di nuovi artifizj per veſtire una forma ſemplice ed elegante: laddove all' oppoſto mercè l' applicazione della predetta teoria ſi giugne ſpeditamente e direttamente alla ſomma delle ſerie propoſte, e queſta ſempre ſi preſenta ſenza l' ajuto di nuovi ripieghi analitici ſotto il più ſemplice aſpetto, cui la natura della quiſtione permetta.

PROBLEMA I.

Sommare la serie $1+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8}{1.2.3....8}+\frac{x^{12}}{1.2.3....12}+\frac{x^{16}}{1.2.3.4....16}+\text{ecc.}=S$

SOLUZIONE.

Si prenda il differenziale, considerando x come variabile, e dx costante, e sarà $\frac{x^3dx}{1.2.3}+\frac{x^7dx}{1.2.3....7}+\frac{x^{11}dx}{1.2.3....11}+\frac{x^{15}dx}{1.2.3....15}+\text{ecc.}=dS$. Di nuovo piglisi il secondo differenziale, che sarà $\frac{x^2dx^2}{1.2}+\frac{x^6dx^2}{1.2.3....6}+\frac{x^{10}dx^2}{1.2.3....10}+\frac{x^{14}dx^2}{1.2.3....14}+\text{ecc.}=ddS$. Si pigli ancora il differenziale terzo $\frac{xdx^3}{1}+\frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5}+\frac{x^9dx^3}{1.2.3....9}+\frac{x^{13}dx^3}{1.2.3....13}+\text{ecc.}=d^3S$. Finalmente si prenda anche il quarto $dx^4+\frac{x^4dx^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8dx^4}{1.2.3....8}+\frac{x^{12}dx^4}{1.2.3....12}+\text{ecc.}=dx^4\left(1+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8}{1.2.3....8}+\frac{x^{12}}{1.2.3....12}+\text{ecc.}\right)=Sdx^4=d^4S$. Ma questa equazione differenziale di quart' ordine, contenendo in ciascun termine la variabile S, e i suoi differenziali alla sola prima dimensione, è un' equazione *lineare*, e però un suo integrale *particolare* sarà $S=e^{mx}$, essendo m una costante indeterminata, ed e il numero, che ha per logaritmo naturale l' unità. Per trovare le quattro costanti arbitarie, che devono entrare nell' integrale *completo*, si differenzj l' equazione $S=e^{mx}$, e sia $dS=mdxe^{mx}$, e novamente $ddS=m^2dx^2e^{mx}$, $d^3S=m^3dx^3e^{mx}$,

$d^4 S = m^4 dx^4 e^{mx} = S dx^4 = e^{mx} dx^4$. Dunque $m^4 = 1$, la qual equazione ha per radici, $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Laonde l'integrale completo sarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x}$, essendo A, B, C, D, le quattro costanti da determinarsi nella maniera seguente. Essendo $S = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x\sqrt{-1}} + De^{-x\sqrt{-1}} = Ae^x + Be^{-x} + C(\cos. x + \text{sen}. x.\sqrt{-1}) + D(\cos. x - \text{sen}. x.\sqrt{-1}) = Ae^x + Be^{-x} + (C + D)\cos. x + (C - D)\,\text{sen}. x.\sqrt{-1}$; ed anche dovendo essere per la natura della proposta serie $S = 1$, quand' $x = 0$, ne viene.

1°. $A + B + (C + D) = 1$.

Inoltre, essendo $x = 0$, dev' essere $dS = 0$, e quindi $dxAe^x - dxBe^{-x} - (C + D)dx\,\text{sen}. x + (C - D)dx\cos. x.\sqrt{-1}$; e dividendo per dx, e fatto $x = 0$, si ha

2°. $A - B + (C - D)\sqrt{-1} = 0$

Parimenti, quando $x = 0$, dev' essere $ddS = 0$; dunque differenziando il valore ora ritrovato di dS, e poscia dividendo per dx^2, e fatto $x = 0$, si ha

3.° $A + B - (C + D) = 0$

Così anche, dovendo essere $d^3 S = 0$, differenziando il valore di ddS, e diviso poi per dx^3, e fatto $x = 0$, si ottiene

4.° $A - B - (C - D)\sqrt{-1} = 0$

Da queste quattro equazioni

1.ª $A + B + (C + D) = 1$

2.ª $A - B + (C - D)\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - (C + D) = 0$

4.ª $A - B - (C - D)\sqrt{-1} = 0$; si ha subito sommando la 2.ª e la 4.ª, $2A - 2B = 0$, e quindi $A = B$; e sommando la 1.ª e la 3.ª si ottiene $2A + 2B = 1$; onde $A = B = \frac{1}{4}$. Dalla 2.ª poi si ha $C = D$, che sostituito nella 3.ª dà $C = D = \frac{1}{4}$. Dunque finalmente $S = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}\left(\cos. x + \text{sen}. x\sqrt{-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\cos. x - \text{sen}. x.\sqrt{-1}\right) = \frac{e^{2x} + 1}{4e^x} + \frac{1}{2}\cos. x$. Il che era ecc.

PROBLEMA II.

Sommare la serie $1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + \text{ecc.} = S$.

SOLUZIONE.

Presi i differenziali si ottiene $dS = \frac{xdx}{1} + \frac{x^3dx}{1.2.3} + \frac{x^5dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7dx}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9dx}{1.2.3....9} + \text{ecc.}$; $ddS = dx^2 + \frac{x^2dx^2}{1.2} + \frac{x^4dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ecc.} = dx^2\left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \text{ecc.}\right) = Sdx^2$. Sicchè sarà come dianzi l' integrale *particolare* dell' equazione *lineare* di second' ordine $ddS = Sdx^2$ espresso da $S = Ae^{mx}$; onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx} = Ae^{mx}dx^2$; e quindi $m^2 = 1$, ed $m = 1$, $m' = -1$. Laonde $S = Ae^x + Be^{-x}$ è l' integrale *completo* di detta equazione. Ma quando $x = 0$, diventa $S = A + B = 1$, $\frac{dS}{dx} = 0 = A - B$; perciò $A = B = \frac{1}{2}$; e però $S = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$. Il che era ecc.

PROBLEMA III.

Sommare la serie $S = \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^7}{2.3....7} + \frac{z^{11}}{2.3....11} + \frac{z^{15}}{2.3....15} + \frac{z^{19}}{2.3....19} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Piglisi il differenziale quattro volte, e sarà $\frac{z^3 dz^4}{2.3} + \frac{z^7 dz^4}{2.3...7} + \frac{z^{11} dz^4}{2.3...11} + \frac{z^{15} dz^4}{2.3...15} + \text{ecc.} = d^4 S = S dz^4$. Quindi preso $S = Aemz$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^4 S = S dz^4$, si ottiene, differenziando, $dS = Amdze^{mz}$, $ddS = Am^2 dz^2 e^{mz}$, $d^3 S = Am^3 dz^3 e^{mz}$, $d^4 S = Am^4 dz^4 e^{mz} = S dz^4 = A dz^4 e^{mz}$. Perlochè dividendo per $A dz^4 e^{mz}$, si ha $m^4 = 1$, che dà quattro radici $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Avremo pertanto l' integrale completo della predetta equazione espresso da $Ae^z + Be^{-z} + Ce^{z\sqrt{-1}} + De^{-z\sqrt{-1}} = S$. Ora, siccome allorchè $z = 0$, nasce $S = 0$, $dS = 0$, $ddS = 0$, $\frac{d^3 S}{dz^3} = 1$, quindi risultano le seguenti equazioni

1.ª $A + B + C + D = 0$

2.ª $A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - C - D = 0$

4.ª $A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 1$

Da queste si ricavano i valori delle costanti arbitrarie; imperciocchè 1.ª + 3.ª $= 2A + 2B = 0$; 2.ª + 4.ª $= 2A - 2B = 1$, cioè $A = -B = \frac{1}{4}$. Parimenti 1.ª − 3.ª $= 2C + 2D = 0$; 2.ª − 4.ª $= 2C\sqrt{-1} - 2D\sqrt{-1} = -1$, vale a dire $C = -D = -\frac{1}{4\sqrt{-1}}$. Sostituiti questi valori nell' integrale, ne deriva $S = \frac{e^z}{4} - \frac{e^{-z}}{4} - \frac{e^{z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} + \frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{e^z - e^{-z}}{4} - \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,z$. Il che era ecc.

SCOLIO

Si arriva a questa serie nello sciogliere il bel Problema Meccanico, in cui si cerca di determinare gli accidenti del moto di un grave, che discende per un piano inclinato in tanto che il piano si aggira intorno alla linea orizzontale, che ne forma la sommità.

PROBLEMA IV.

Sommare la serie $1 + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + \frac{x^{15}}{1.2.3....10} + \frac{x^{20}}{1.2.3....20} + \text{ecc.} = S$.

SOLUZIONE.

Mediante la differenziazione nascono le equazioni $dS = \frac{x^4 dx}{1.2.3.4} + \frac{x^9 dx}{1.2.3....9} + \frac{x^{14} dx}{1.2.3....14} + \frac{x^{19} dx}{1.2.3....19} + \text{ecc.}$; $ddS = \frac{x^3 dx^2}{1.2.3} + \frac{x^8 dx^2}{1.2.3....8} + \frac{x^{13} dx^2}{1.2....13} + \frac{x^{18} dx^2}{1.2.3....18} + \text{ecc.}$; $d^3S = \frac{x^2 dx^3}{1.2} + \frac{x^7 dx^3}{1.2....7} + \frac{x^{12} dx^3}{1.2....12} + \frac{x^{17} dx^3}{1.2....17} + \text{ecc.}$; $d^4S = \frac{x dx^4}{1} + \frac{x^6 dx^4}{1.2....6} + \frac{x^{11} dx^4}{1.2....11} + \frac{x^{16} dx^4}{1.2....16} + \text{ecc.}$; $d^5S = dx^5 + \frac{x^5 dx^5}{1.2....5} + \frac{x^{10} dx^5}{1.2....10} + \frac{x^{15} dx^5}{1.2....15} + \text{ecc.} = dx^5 \left(1 + \frac{x^5}{1.2....5} + \frac{x^{10}}{1.2....10} + \frac{x^{15}}{1.2....15} + \text{ecc.}\right) = S dx^5$. L' integrale particolare è al solito $S = Ae^{mx}$, dal che si cava, come sopra $d^5S = Am^5 dx^5 e^{mx} = S dx^5 = Ae^{mx} dx^5$; onde $m^5 = 1$. Ora l' equazione $m^5 - 1 = 0$

ha per fattori $m - 1 = 0$, $m^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} m + 1 = 0$,

$m^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} m + 1 = 0$, che danno $m = 1$, $m' = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$
$+ \sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$, $m'' = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$,
$m''' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$, $m'''' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$
$- \sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$. Dunque, posto $\frac{-5+\sqrt{5}}{8} = -n$, l' integrale completo della equazione lineare $d^5 S = S\,dx^5$ sarà Ae^{mx}
$+ Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} + Ee^{m''''x} = Ae^x + Be^{(1-\sqrt{5})x:4 + x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$
$+ Ce^{(1-\sqrt{5})x:4 - x\sqrt{n}.\sqrt{-1}} + De^{(-1-\sqrt{5})x:4 + x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$
$+ Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4 - x\sqrt{n}.\sqrt{-1}} = Ae^x + Be^{(1-\sqrt{5})x:4}$
$(\text{cos}.\, x\sqrt{n} + \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}) + Ce^{(1-\sqrt{5})x:4}$
$(\text{cos}.\, x\sqrt{n} - \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}) + De^{(-1-\sqrt{5})x:4}$
$(\text{cos}.\, x\sqrt{n} + \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}) + Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4}$
$(\text{cos}.\, x\sqrt{n} - \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}) = Ae^x + (B+C)e^{(1-\sqrt{5})x:4} \times$
$\text{cos}.\, x\sqrt{n} + (B-C)e^{(1-\sqrt{5}):4}\, \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$
$+ (D+E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\, \text{cos}.\, x\sqrt{n}$
$+ (D-E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\, \text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$, cioè posto
$B + C = F$, $B - C = G$, $D + E = H$, $D - E = I$, nasce
$S = Ae^x + Fe^{(1-\sqrt{5})x:4}\, \text{cos}.\, x\sqrt{n} + Ge^{(1-\sqrt{5})x:4}$
$\text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1} + He^{(-1-\sqrt{5})x:4}\, \text{cos}.\, x\sqrt{n} + Ie^{(-1-\sqrt{5})x:4}$
$\text{sen}.\, x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$. Si osservi ora, che fatto $x = 0$, diventa
$S = 1$, $\frac{dS}{dx} = \frac{ddS}{dx^2} = \frac{d^3S}{dx^3} = \frac{d^4S}{dx^4} = 0$, donde si traggono cinque

que equazioni per determinare le costanti arbitrarie A, F, G, H, I. In fatti in tal ipotesi di $x = 0$, l' equazione $S = 1$ dà

$1^{\circ}.\ A + F + H = 1$. Così $dS = 0$ dà

$$2^{\circ}.\ A + \frac{1-\sqrt{5}}{4}F + G\sqrt{n}.\sqrt{-1} - H.\frac{1+\sqrt{5}}{4} + I.\sqrt{n}.\sqrt{-1} = 0.$$

Parimenti $ddS = 0$ dà $3^{\circ}.\ A - \frac{1}{4}F + G.\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1}$ $- H.\frac{1-\sqrt{5}}{4} - I.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1} = 0$. Ma siccome per ottenere le altre due equazioni, che restano, cioè la 4.ª, e la 5ª. il calcolo riesce assai lungo e tedioso, parmi più espediente procedere così: Le cinque radici dell' equazione $m^5 - 1 = 0$ sono $1, a+b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, f+g\sqrt{-1}, f-g\sqrt{-1}$, onde l' integrale completo è $Ae^x + Be^{ax+bx\sqrt{-1}}$ $+ Ce^{ax-bx\sqrt{-1}} + De^{fx+gx\sqrt{-1}} + Ee^{fx+gx\sqrt{-1}}$. Laonde supposto $x = 0$, si avranno le seguenti equazioni

$1^a.\ A + B + C + D + E = 1$,

$2^a.\ A + (a+b\sqrt{-1})B + (a-b-\sqrt{-1})C + (f+g\sqrt{-1})D + (f-g\sqrt{-1})E = 0$,

$3^a\ A + (a+b\sqrt{-1})^2B + (a-b\sqrt{-1})^2C + (f+g\sqrt{-1})^2D + (f-g\sqrt{-1})^2E = 0$,

$4^a.\ A + (a+b\sqrt{-1})^3B + (a-b\sqrt{-1})^3C + (f+g\sqrt{-1})^3D + (f-g\sqrt{-1})^3E = 0$,

$5^a.\ A + (a+b\sqrt{-1})^4B + (a-b\sqrt{-1})^4C + (f+g\sqrt{-1})^4D + (f-g\sqrt{-1})^4E = 0$,

dalle quali si otterranno i valori delle cinque costanti arbitrarie. Il che ecc

PROBLEMA V.

Sommare la serie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3....6} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10}$ $+ \frac{x^{14}}{1.2.3....14} + \text{ecc.} = S$

SOLUZIONE.

Si trova $dS = \frac{xdx}{1} + \frac{x^5dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^9dx}{1.2.3...9} + \frac{x^{13}dx}{1.2.3...13} +$ ecc.;
$ddS = dx^2 + \frac{x^4dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^8dx^2}{1.2.3...8} + \frac{x^{12}dx^2}{1.2.3...12} +$ ecc.;
$d^3S = \frac{x^3dx^3}{1.2.3} + \frac{x^7dx^3}{1.2.3...7} + \frac{x^{11}dx^3}{1.2.3....11} +$ ecc.;
$d^4S = \frac{x^2dx^4}{1.2} + \frac{x^6dx^4}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}dx^4}{1.2.3...10} +$ ecc.
$= dx^4\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}}{1.2...10} + \text{ecc.}\right) = Sdx^4$. Ora per l' indole dell' equazione differenziale lineare di quart' ordine $d^4S = Sdx^4$, si trova, che un suo integrale particolare è $S = Ae^{mx}$; onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, $d^4S = Am^4dx^4e^{mx} = Sdx^4 = Ae^{mx}dx^4$; e perciò $m^4 - 1 = 0$, ovvero $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$, e conseguentemente $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Sicchè l' integrale completo dell' equazione $d^4S = Sdx^4$ è $Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x\sqrt{-1}} + De^{-x\sqrt{-1}}$. Per determinare ora le costanti arbitrarie A, B, C, D si osservi, che quando $x = 0$, diventa $S = 0$, $\frac{dS}{dx} = 0$, $\frac{ddS}{dx^2} = 1$, $\frac{d^3S}{dx^3} = 0$. Dunque si avranno le equazioni seguenti

1.ª $A + B + C + D = 0$

2.ª $A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - C - D = 1$

4.ª $A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 0$. Sommando la 2.ª e la 4.ª si ha $2A - 2B = 0$, cioè $A = B$; e sommando la prima e la 3.ª nasce $2A + 2B = 1$, ovvero $A = B = \frac{1}{4}$.

Posto questo valore nella 1.^{a} si ha $C+D=-\frac{1}{2}$; ma dall' ultima si ottiene $C=D$; dunque $C=D=-\frac{1}{4}$. Laonde

$$S=\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x\sqrt{-1}}-\frac{1}{4}e^{-x\sqrt{-1}}=\frac{e^{2x}+1}{4e^x}$$

$$-\frac{1}{4}(\text{cos}.\,x+\text{sen}.\,x.\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(\text{cos}.\,x-\text{sen}.\,x.\sqrt{-1})$$

$$=\frac{e^{2x}+1}{4e^x}-\frac{1}{2}\text{cos}.\,x.$$ Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Sommare la serie $1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^9}{1.2.3...9}+\frac{x^{12}}{1.2.3...12}+\text{ecc.}=S$.

SOLUZIONE.

Si trova $dS=\frac{x^2dx}{1.2}+\frac{x^5dx}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx}{1.2.3...8}+\frac{x^{11}dx}{1.2.3...11}+\text{ecc.}$;

$ddS=\frac{xdx^2}{1}+\frac{x^4dx^2}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx^2}{1.2.3...7}+\frac{x^{10}dx^2}{1.2.3...10}+\text{ecc.}$;

$d^3S=dx^3+\frac{x^3dx^3}{1.2.3}+\frac{x^6dx^3}{1.2.3...6}+\frac{x^9dx^3}{1.2.3...9}+\text{ecc.}=$

$dx^3\left(1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3...6}+\frac{x^9}{1.2.3...9}+\text{ecc.}\right)=Sdx^3$. Perciò pigliando $S=Ae^{mx}$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^3S=Sdx^3$, si ha $dS=Amdxe^{mx}$, $ddS=Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S=Am^3dx^3e^{mx}=Sdx^3=Ae^{mx}dx^3$; ond' è $m^3=1$, ed $m=1$, $m'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $m''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Laonde l' integrale completo sarà $S=Ae^x$
$+Be^{(-x):2}.e^{(x\sqrt{3}):2.\sqrt{-1}}+Ce^{(-x):2}.e^{(-x\sqrt{3}):2.\sqrt{-1}}=Ae^x$

$+ Be^{(-x):2}\left(\text{cos.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2} + \text{sen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right) + Ce^{(-x):2}$
$\left(\text{cos.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2} - \text{sen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}\right) = Ae^{x} + (B+C)\,e^{(-x):2}\times$
$\text{cos.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2} + (B-C)\,e^{(-x):2}\,\text{sen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$. Ora, quando $x=0$ diventa $S=1$, $dS=0$, $ddS=0$, cioè

1.° $A+(B+C)=1$

2.° $A-\frac{(B+C)}{2}+\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$

3.° $A-\frac{(B+C)}{2}-\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$. Sottraggo la 3.ª dalla 2.ª, ed ho $(B-C)=0$. Dalla 2.ª poi ottengo $A=\left(\frac{B+C}{2}\right)$; e dalla 1.ª $A=1-(B+C)$, ond' è $\frac{(B+C)}{2}=1-(B+C)$, cioè $(B+C)=\frac{2}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{(-x):2}\,\text{cos.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la serie $x+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^7}{1.2.3\ldots7}+\frac{x^{10}}{1.2.3\ldots10}+\text{ecc.}=S$.

SOLUZIONE.

Presi i differenziali si ha $dS=dx+\frac{x^3dx}{1.2.3}+\frac{x^6dx}{1.2.3\ldots6}+\frac{x^9dx}{1.2.3\ldots9}+\text{ecc.}$; $ddS=\frac{x^2dx^2}{1.2}+\frac{x^5dx^2}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx^2}{1.2.3\ldots8}+\text{ecc.}$; $d^3S=\frac{xdx^3}{1}+\frac{x^4dx^3}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx^3}{1.2.3\ldots7}+\text{ecc.}$

$= dx^3 \left(x + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^7}{1.2.3...7} + \text{ecc.} \right) = S dx^3$. Avutasi ora l' equazione differenziale lineare $d^3 S = S dx^3$, pongasi $S = Ae^{mx}$, onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, il qual valore sostituito nell' equazione $d^3S = Sdx^3$ dà $Am^3dx^3e^{mx} = Sdx^3 = Ae^{mx}dx^3$, e quindi $m^3 = 1$, cioè $m = 1$ $m'' = \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$, $m' = \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$. Laonde l' integrale completo dell' equazione $d^3S = Sdx^3$ sarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} = Ae^x + (B + C) e^{(-x):2} \operatorname{cos.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B - C) e^{(-x):2} \operatorname{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$.

Ora si rifletta, che quando $x = 0$, $S = 0$; $\frac{dS}{dx} = 1$; $ddS = 0$; onde

1.ª $A + (B + C) = 0$.

2.ª $A - \frac{(B + C)}{2} + \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1$.

3.ª $A - \frac{(B + C)}{2} - \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0$.

Da questa terza equazione si ottiene $\frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = A - \frac{(B + C)}{2}$, il qual valore sostituito nella seconda dà $2A - (B + C) = 1$, ed in questa surrogando il valore $A = -(B + C)$ cavato dalla prima, si ottiene $(B + C) = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$, $(B - C)\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Laonde $S = \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{3} e^{(-x):2} \operatorname{cos.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{(-x):2} \operatorname{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VIII.

Sommare la serie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \frac{x^{11}}{1.2.3....11} + \text{ecc.} = S$.

SOLUZIONE

Pigliati i differenziali nascono le equazioni

$$dS = xdx + \frac{x^4dx}{1.2.3.4} + \frac{x^7dx}{1.2.3....7} + \frac{x^{10}dx}{1.2.3....10} + \text{ecc.};$$

$$ddS = dx^2 + \frac{x^3dx^2}{1.2.3} + \frac{x^6dx^2}{1.2.3....6} + \frac{x^9dx^2}{1.2.3....9} + \text{ecc.};$$

$$d^3S = \frac{x^2dx^3}{1.2} + \frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8dx^3}{1.2.3....8} + \text{ecc.}$$

$= dx^3\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \text{ecc.}\right) = Sdx^3$. Trattisi ora l' equazione differenziale lineare $d^3S = Sdx^3$ come dianzi ponendo $S = Ae^{mx}$; sicchè risulterà l' integrale completo

$S = Ae^x + (B+C)e^{(-x):2} \operatorname{cos}. \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B-C)e^{(-x):2} \times \operatorname{sen}. \frac{x\sqrt{3}}{2} . \sqrt{-1}$. Se pertanto si considera, che quando $x = 0$, diventa $S = 0$, $dS = 0$, $\frac{ddS}{dx^2} = 1$, nascono le tre seguenti equazioni.

1ª. $A + (B+C) = 0$;

2ª. $A - \frac{(B+C)}{2} + \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 0$

3ª. $A - \frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 1$. Dalla 2ª. si ottiene $A - \frac{(B+C)}{2} = -\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$, che surro-

gato nella 3ª. dà $2A-(B+C)=1$, ed in questa sostituendo il valore della prima $A=-(B+C)$, si trova per fine $(B+C)=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{3}$, $(B-C)\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{(-x):2}\,\text{cos.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2}\,\text{sen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA IX.

Trovare la somma generale di tutte le serie della forma $\frac{x^{r}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)}+\text{ecc.}=S$, *supponendo* r, n *numeri interi affermativi*.

SOLUZIONE.

Caso I°. $n>r$.

Preso il differenziale $n.^{esimo}$ di detta serie, si vede facilmente, che nascerà $d^{n}S=\frac{x^{r}dx^{n}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}dx^{n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}dx^{n}}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}=dx^{n}\left(\frac{x^{r}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}\right)=Sdx^{n}$. Se ora per la nota teoria delle equazioni differenziali *lineari*, si assume $S=Ae^{mx}$ per integrale particolare dell' equazione lineare $d^{n}S=Sdx^{n}$, è chiaro che si avrà $d^{n}S=Am^{n}e^{mx}dx^{n}=Sdx^{n}=Aem^{x}dx^{n}$, d' onde si trae $m^{n}=1$. Prese pertanto le n radici dell' equazione $m^{n}=1$ le quali (essendo n pari) sono 1, -1, $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, $f+g\sqrt{-1}$, $f-g\sqrt{-1}$, ecc. si otterrà l' integrale completo dell' equazione $d^{n}S=Sdx^{n}$, il quale sarà di questa forma $Ae^{x}+Be^{-x}+Ce^{ax+bx\sqrt{-1}}+De^{ax-bx\sqrt{-1}}+Ee^{fx+gx\sqrt{-1}}+Fe^{fx-gx\sqrt{-1}}+\text{ecc.}=Ae^{x}+Be^{-x}$

$+(C+D)e^{ax}\cos. bx+(C-D)e^{ax}\text{sen.}\, bx.\sqrt{-1}+(E+F)e^{fx}$ $\cos. g.x+(E-F)\sqrt{-1}.\,\text{sen.}\,gx+$ ecc. Per determinare poi le coſtanti arbitrarie A, B, C, D, ecc. convien riſolvere le n ſeguenti equazioni

1ª. $A+B+C+D+E+F+\text{ecc.}=0$,

2ª. $A-B+(a+b\sqrt{-1})C+(a-b\sqrt{-1})D+(f+g\sqrt{-1})E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0$,

3ª. $A+B+(a+b\sqrt{-1})^2C+(a-b\sqrt{-1})^2D+(f+g\sqrt{-1})^2E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0$,

4ª. $A-B+(a+b\sqrt{-1})^3C+(a-b\sqrt{-1})^3D+(f+g\sqrt{-1})^3E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0$,

ecc.

:

:

:

$(r+1)$ª. $A\pm B+(a+b\sqrt{-1})^rC+(a-b\sqrt{-1})^rD+(f+g\sqrt{-1})^rE$
$+(f-g\sqrt{-1})^rF+\text{ecc.}=1$

:

:

:

nª $A-B+(a+b\sqrt{-1})^{n-1}C+(a-b\sqrt{-1})^{n-1}D$
$+(f+g\sqrt{-1})^{n-1}E+(f-g\sqrt{-1})^{n-1}F+\text{ecc.}=0$.

Queſte derivano dall' eſſere, quando $x=0$, ancora $S=0$, $dS=0$, $ddS=0$, ecc... $\frac{d^rS}{dx^r}=1$........ $d^{n-1}S=0$, ed il doppio ſegno nella $(r+1)$ª poſto al B ſerve pel doppio caſo in cui può trovarſi r di pari o diſpari, cioè eſſendo r pari vale il ſegno + e vale il ſegno − quando r è diſpari. Se in luogo d'eſſere n pari, come abbiamo ſuppoſto, foſſe diſpari, allora mancherà una delle due radici reali, cioè -1; e perciò ſarà $B=0$, e tutto il reſto ſarà come ſopra, con avvertire però che a, b, f, g, ecc. non ſaranno più quelli di prima.

Caſo

Caso II°. $n = r$.

Si aggiunga alla serie S l' unità, e si faccia $S' = S + 1$

$$= 1 + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3....3r} + \text{ecc.}$$

Di qui si deduce $d^rS' = dx^r + \frac{x^r dx^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \text{ecc.}$

$$= dx^r \left(1 + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3....3r} + \text{ecc.}\right) = S'dx^r.$$

Sicchè prendendo Ae^{mx} per integrale particolare dell' equazione $d^rS' = S'dx^r$, ed essendo $d^rS' = Am^r e^{mx} dx^r = S'dx^r = Ae^{mx}dx^r$, e quindi $m^r = 1$, si trovino le r radici di quest' ultima equazione, che saranno, nel supposto di r pari, 1, -1, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\gamma + \delta\sqrt{-1}$, $\gamma - \delta\sqrt{-1}$, ecc. Laonde l' integrale completo dell' equazione differenziale sarà $Ae^x + Be^{-x}$ $+ Ce^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} + De^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}} + Ee^{\gamma x + \delta x\sqrt{-1}} + Fe^{\gamma x - \delta x\sqrt{-1}}$ $+ \text{ecc.} = Ae^x + Be^{-x} + (C+D)e^{\alpha x}\,\text{cos}.\,\beta x + (C-D)\sqrt{-1}.\,e^{\alpha x} \times$ sen. $\beta x + (E+F)e^{\gamma x}\,\text{cos}.\,\delta x + (E-F)\sqrt{-1}.\,e^{\gamma x}$ sen. $\delta x + \text{ecc.}$ Siccome per supposto $x = 0$, si ha $S' = 1$, $dS' = 0$, $ddS = 0$, ... $d^{r-1}S = 0$, quindi si avranno per la determinazione delle n costanti A, B, C, D, E, F, ecc. le seguenti n equazioni

1°. $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.} = 1$

2°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})F + \text{ecc.} = 0$

3°. $A + B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^2 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^2 E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.} = 0$

4°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^3 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^3 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^3 E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.} = 0$

ecc.

:

:

n°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{n-1}C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^{n-1}D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^{n-1}E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^{n-1}F + \text{ecc.} = 0.$

Dunque la somma ricercata $S = S' - 1 = Ae^{x} + Be^{-x} - 1 + (C + D)e^{\alpha x}\text{ cos. }\beta x + (C - D)e^{\alpha x}\sqrt{-1}\text{ . sen. }\beta x + (E + F)e^{\gamma x}\text{ cos. }\delta x + (E - F)\sqrt{-1}\text{ . }e^{\gamma x}\text{ sen. }\delta x + \text{ecc.}$ Anche qui si avverta, che nel caso di n dispari sarà $B = 0$

Caso III. $n < r$.

Alla proposta serie $S = \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)} + \text{ecc.}$ si aggiungano tanti termini iniziali $\frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-3n}}{1.2.3....(r-3n)} + \ldots\ldots + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)}$ fino a che l' esponente $r - \lambda n$ di x diventa $< n$, oppure $= n$, e si faccia $S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} = \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)} + \frac{x^{r+4n}}{1.2.3....(r+4n)} + \text{ecc.} = S'$.. Se ora si prende della serie S' il differenziale $n.^{esimo}$, si scorge facilmente, per essere $r - \lambda n < n$, che risulta $d^n S' = \frac{x^{r-\lambda n}dx^n}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}dx^n}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \frac{x^{r-(\lambda-2)n}dx^n}{1.2.3....(r-(\lambda-2)n)} + \ldots\ldots + \frac{x^{r-2n}dx^n}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}dx^n}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^r dx^n}{1.2.3....r} + \frac{x^{r+n}dx^n}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}dx^n}{1.2.3....(r+2n)} + \text{ecc.}$

$$= dx^n \left(\frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \right.$$

$$+ \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-2n)} \left(+ \frac{x^r}{1.2.3....r} \right.$$

$$\left. + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3...(r+2n)} + \text{ecc.} \right) = S' dx^n.$$ Confiderata pertanto l' equazione lineare differenziale di ordine $n.^{esimo}$ $d^n S' = S\,dx^n$, è noto dalla teoria di tali equazioni, che un fuo integrale particolare farà della forma $S' = Ae^{mx}$; d' onde fi raccoglie $d^n S' = Am^n e^{mx} dx^n = S dx^n = Ae^{mx} dx^n$, e quindi $m^n = 1$. Trovate le n radici dell' equazione $m^n = 1$, le quali, fuppofto n pari, faranno 1, -1, $\mu + \upsilon\sqrt{-1}$, $\mu - \upsilon\sqrt{-1}$, $\phi + \omega\sqrt{-1}$, $\phi - \omega\sqrt{-1}$, ecc. fi avrà l' integrale completo dell' equazione $d^n S' = S\,dx^n$ efpreffo da

$$Ae^x + Be^{-x} + Ce^{\mu x + \upsilon x\sqrt{-1}} + De^{\mu x - \upsilon x\sqrt{-1}} + Ee^{\phi x + \omega x\sqrt{-1}}$$

$$+ Fe^{\phi x - \omega x\sqrt{-1}} + \text{ecc.} = \frac{Ae^{2x} + B}{e^x} + (C + D)e^{\mu x}\,\text{cof.}\,\upsilon x$$

$$+ (C - D)\sqrt{-1}.\,e^{\mu x}\,\text{fen.}\,\upsilon x + (E + F)\,e^{\phi x}\,\text{cof.}\,\omega x$$

$$+ (E - F)\sqrt{-1}.\,e^{\phi x}\,\text{fen.}\,\omega x + \text{ecc.}$$ Ora ficcome fi ha

$$S' = 0,\ dS' = 0,\ ddS' = 0,\ \text{ecc.....}\ \frac{d^{(r-\lambda n)}S}{dx^{(r-\lambda n)}} = 1,\ .....\ d^{n-1}S = 0$$

nel cafo di $x = 0$; quindi per determinare le coftanti A, B, C, D, E, F, ecc. fi prefentano da rifolvere le n feguenti equazioni.

1.° $A + B + C + D + E + F + \text{ecc....} = 0$

2.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})\,C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})\,D + (\phi + \omega\sqrt{-1})\,E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})\,F + \text{ecc....} = 0$

3.° $A + B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^2 C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^2 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^2 E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.....} = 0$

4.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^3 C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^3 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^3 E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.....} = 0$

⋮

$$\left((r-\lambda n)+1\right)^a.\ A \pm B + (\mu+\upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} C + (\mu-\upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} D$$
$$+ (\phi+\omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} E + (\phi-\omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} F + \text{ecc.} = 1$$

:
:
:

$$n.^o\ A - B + (\mu+\upsilon\sqrt{-1})^{n-1} C + (\mu-\upsilon\sqrt{-1})^{n-1} D$$
$$+ (\phi+\omega\sqrt{-1})^{n-1} E + (\phi-\omega\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0.$$

Il doppio segno premesso al B nella $\left((r-\lambda n)+1\right)^a$. serve come nel I.° caso, cioè vale il $+$ quando $(r-\lambda n)$ è pari ed il $-$ quando $(r-\lambda n)$ è dispari. Qui pure è da avvertirsi, che se n sarà dispari, diverrà $B=0$ a motivo della mancanza della radice -1 nell' equazione $m^n=1$. Dunque

$$S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....\left(r-(\lambda-1)n\right)} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} = S' = \frac{Ae^{2x}+B}{e^x}$$
$$+ (C+D)\, e^{\mu x} \cos.\, \upsilon x + (C-D)\, e^{\mu x} \sqrt{-1}.\, \text{sen.}\, \upsilon x$$
$$+ (E+F)\, e^{\phi x} \cos.\, \omega x + (E-F) \sqrt{-1}.\, e^{\phi x}\, \text{sen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$

Conseguentemente la somma ricercata $S = \dfrac{Ae^{2x}+B}{e^x}$

$$- \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} - \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....\left(r-(\lambda-1)n\right)} - \text{ecc.}\ldots\ldots$$
$$- \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} - \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + (C+D)\, e^{\mu x} \cos.\, \upsilon x$$
$$+ (C-D)\sqrt{-1}.\, e^{\mu x}\, \text{sen.}\, \upsilon x + (E+F)\, e^{\phi x} \cos.\, \omega x$$
$$+ (E-F)\sqrt{-1}.\, e^{\phi x}\, \text{sen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$ Il che era ecc.

ARTICOLO II.

Della somma di alcune Serie di Simpson, ed altre.

Il celebre *Tommaso Simpson* ne' suoi *Essays on several curious and useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks* facendo uso del *Metodo* così detto *degl' Incrementi* ritrova la somma di quelle serie numeriche, i di cui termini hanno per numeratore l' unità, e per denominatore un prodot-

to d' un' egual moltitudine di numeri naturali confecutivi, il primo de' quali in ciafcun termine è fempre il fecondo del termine precedente. Ma un metodo più generale, per confeguire fiffatte fomme anche nel cafo che i numeratori dei termini delle ferie fieno le poteftà d' un qualche numero dotate d' un efponente eguale all' ultimo fattore del denominatore di ciafcun termine, e che il primo fattore del denominatore di qualunque termine fia fempre non il fecondo, ma il terzo, o il quarto, o il quinto ecc. fattore del denominatore del termine proffimo precedente, un tal metodo, diffi, ci viene fomminiftrato dalla comune Teoria degl' *Integrali replicati*, la quale come troppo ovvia e familiare agli Analifti non ha qui bifogno di effere pofta in maggior luce, baftando folo di moftrarne l' applicazione e l' ufo ne' feguenti Problemi.

PROBLEMA I.

Sommare la ferie $S = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+3)(n+4)} +$ ecc. *in inf.*

Soluzione.

Differenziata due volte l' equazione nell' ipotefi di dx coftante, nafce $ddS = dx^2 (x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} +$ ecc.$) = dx^2 \times \frac{x^{n-1}}{1-x}$. Perlochè $\frac{ddS}{dx} = \frac{x^{n-1}dx}{1-x}$, ed integrando nella detta ipotefi, $\frac{dS}{dx} = \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + A$, ovvero $dS = dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Adx$, e nuovamente integrando, fi ottiene $S = \int dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Ax + B = x \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} - \int \frac{x^n dx}{1-x} + Ax + B$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Suppongasi $n = 1$, e si avrà $S = -x \log.(1 - x) + x + \log.(1 - x) + Ax + B$; e siccome dee svanire S allorchè $x = 0$, nascerà $B = 0$. Inoltre essendo $\frac{dS}{dx} = -\log.(1 - x) + A = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} +$ ecc.; e però annullandosi $\frac{dS}{dx}$ insieme con x, si otterrà $A = 0$. Laonde la serie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} +$ ecc. *in inf.* $= x - x \log.(1 - x) + \log.(1 - x) = x + \log. \frac{1 - x}{(1 - x)^x}$. Se $x = 1$, nasce $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} +$ ecc. $= 1$.

SCOLIO

Si avverta qui attentamente, che nell' ipotesi di $n = 1$ il valore della serie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} +$ ecc. cioè $x + \log. \frac{1 - x}{(1 - x)^x}$ contiene un logaritmo d' un numero negativo tutte le volte che x è un intero pari, ovvero una frazione spuria, avente un pari per numeratore e un dispari per denominatore. Si avverta però altresì che la serie è divergente allorchè $x > 1$.

PROBLEMA II.

Sommare la serie $S = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} +$ ecc. in inf.

SOLUZIONE.

Si differenzj l' equazione, e si otterrà $dS = dx(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.})$; si torni a differenziare, e nascerà $ddS = dx^2(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ecc.})$. Si differenzj la terza volta, e risulterà $d^3S = dx^3(1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}) = dx^3 \times \frac{1}{1-x}$; e quindi $\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1-x}$. L' integrale di questa equazione somministra $\frac{d^2S}{dx^2} = -\log.(1-x)$ senza costante, perchè, posto $x = 0$, sparisce l'uno e l'altro membro della equazione. Moltiplicando poi questa per dx, sicchè venga $\frac{d^2S}{dx} = -dx \log.(1-x)$, ed integrando di nuovo, si ottiene $\frac{dS}{dx} = -x\log.(1-x) + \int -\frac{xdx}{1-x} = -x\log.(1-x) + \int(dx - \frac{dx}{1-x}) = -x\log.(1-x) + x + \log.(1-x)$, senza costante per la ragione precedente. Sicchè moltiplicando per dx nascerà $dS = xdx + dx\log.(1-x) - xdx\log.(1-x)$, e preso nuovamente l' integrale, si trova $S = \frac{1}{2}x^2$
$+ x\log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x)$
$+ \int -\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x} = \frac{1}{2}x^2 + x\log.(1-x) - x - \log.(1-x)$
$- \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) + \int(\frac{1}{2}xdx + \frac{1}{2}dx - \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x}) = \frac{3}{4}x^2$
$- \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log.(1-x) + x\log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x)$, senza costante per la detta ragione. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Supposto $x = 1$, si ha la somma della serie $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.2}$.

PROBLEMA III.

Sommare la serie $S = \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{x^7}{4.5.6.7} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Il primo differenziale dà $dS = dx\left(\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^6}{4.5.6} + \text{ecc.}\right)$, cioè dx moltiplicato nella serie del Prolema precedente; sicchè $dS = dx\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log.(1-x) + x\log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x)\right)$, ed integrando proviene $S = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\log.(1-x) + \int -\frac{\frac{1}{2}xdx}{1-x} + \frac{1}{2}x^2 \times \log.(1-x) + \int \frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x} - \frac{1}{2.3}x^3\log.(1-x) + \int -\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}$
$= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\log.(1-x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1-x)$
$+ \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log.(1-x)$

$-\frac{1}{2.3}$

$- \frac{1}{2.3} x^3 \log.(1-x) + \frac{1}{2.3.3} x^3 + \frac{1}{2.2.3} x^2 + \frac{1}{2.3} x + \frac{1}{2.3}$
$\log.(1-x) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.3}\right) x^3 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} \log.(1-x)$
$- \frac{1}{2} x \log.(1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log.(1-x) - \frac{1}{6} x^3 \log.(1-x)$. Il che ecc.

COROLLARIO.

Posta $x = 1$, si ha $S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} +$ ecc. $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3.3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3.3 + 2 - 5.3 + 6}{2.2.3.3} = \frac{9 + 2 + 6 - 15}{2.2.3.3} = \frac{1}{1.2.3.3}$.

PROBLEMA IV.

Sommare la serie $S = \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{4.5.6.7.8} +$ ecc. in inf.

SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione somministra $dS = dx\left(\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{3.4.5.6} + \frac{x^7}{4.5.6.7} + \text{ecc.}\right)$, che pel Probl. prec. è $= dx\left(\frac{11}{36} x^3 - \frac{5}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} \log.(1-x) - \frac{1}{2} x \log.(1-x) + \frac{1}{2} x^2 \log.(1-x) - \frac{1}{6} x^3 \log.(1-x)\right)$.

Dunque integrando sarà $S = \frac{11}{36.4} x^4 - \frac{5}{12.3} x^3 + \frac{1}{6.2} x^2$

$$+\frac{1}{6}x\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}xdx}{1-x}-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}$$

$$+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$-\int\frac{\frac{1}{24}x^4dx}{1-x}=\frac{11}{4.36}x^4-\frac{5}{3.12}x^3+\frac{1}{2.6}x^2+\frac{1}{6}x\log.(1-x)$$

$$-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)+\int\left(\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{4}dx-\frac{\frac{1}{4}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}x^2dx-\frac{1}{6}xdx-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(\frac{1}{24}x^3dx+\frac{1}{24}x^2dx+\frac{1}{24}xdx+\frac{1}{24}dx-\frac{\frac{1}{24}dx}{1-x}\right)=$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{11}{4.36}\\+\frac{1}{4.24}\end{matrix}\right\}x^4\quad\left.\begin{matrix}-\frac{5}{3.12}\\-\frac{1}{3.6}\\+\frac{1}{3.24}\end{matrix}\right\}x^3\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.4}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.24}\end{matrix}\right\}x^2$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{24}\end{matrix}\right\}x\quad\left.\begin{matrix}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\+\frac{1}{24}\\-\frac{1}{6}\end{matrix}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)\log.(1-x)=\frac{25}{2.4.6.6}x^4$$

$- \frac{13}{2.6.6} x^3 + \frac{7}{2.4.6} x^2 - \frac{1}{4.6} x + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{4} x^2 \right.$
$\left. + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 \right) \log.(1 - x)$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Pigliando $x = 1$ ne viene la somma $\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6}$
$+ \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{25}{2.4.6.6} - \frac{13}{2.6.6} + \frac{7}{2.4.6}$
$- \frac{1}{4.6} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$.

PROBLEMA V.

Sommare la serie $S = \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$
$+ \frac{x^8}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Dal differenziale dell' equazione se ne ha quest' altra
$dS = dx \left(\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^7}{3.4.5.6.7} + \text{ecc.} \right)$, cioè pel
Probl. prec. $dS = dx \left(\frac{25}{2.4.6.6} x^4 - \frac{13}{2.6.6} x^3 + \frac{7}{2.4.6} x^2 \right.$
$\left. - \frac{1}{4.6} x \right) + dx \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 \right) \log.(1-x)$.
Dunque integrando si ha $S = \frac{5}{2.4.6.6} x^5 - \frac{13}{2.4.6.6} x^4$
$+ \frac{7}{2.3.4.6} x^3 - \frac{1}{2.4.6} x^2 + \left(\frac{-x}{24} + \frac{1}{2.6} x^2 - \frac{1}{3.4} x^3 + \frac{1}{4.6} x^4 \right.$

$$-\frac{1}{5.24}x^5\Big)\log.(1-x)$$

$$+\int dx\left(\frac{-\frac{1}{24}x+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4-\frac{1}{5.24}x^5}{1-x}\right).$$ E poichè l' integrale di queſt' ultimo termine è $=\frac{1}{24}x$

$$+\frac{1}{24}\log.(1-x)-\frac{1}{4.6}x^2-\frac{1}{2.6}x-\frac{1}{2.6}\log.(1-x)$$
$$+\frac{1}{3.3.4}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^2+\frac{1}{3.4}x+\frac{1}{3.4}\log.(1-x)-\frac{1}{4.4.6}x^4$$
$$-\frac{1}{3.4.6}x^3-\frac{1}{2.4.6}x^2-\frac{1}{4.6}x-\frac{1}{4.6}\log.(1-x)+\frac{1}{5.5.24}x^5$$
$$+\frac{1}{4.5.24}x^4+\frac{1}{3.5.24}x^3+\frac{1}{2.5.24}x^2+\frac{1}{5.24}x+\frac{1}{5.24}\log.(1-x),$$

ſe queſto ſi aggiugne agli altri, riſulta

$$S=\left.\begin{matrix}\frac{5}{2.4.6.6}\\+\frac{1}{4.5.5.6}\end{matrix}\right\}x^5\quad\left.\begin{matrix}-\frac{13}{2.4.6.6}\\-\frac{1}{4.4.6}\\+\frac{1}{4.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^4\quad\left.\begin{matrix}+\frac{7}{2.3.4.6}\\+\frac{1}{3.3.4}\\-\frac{1}{3.4.6}\\+\frac{1}{3.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^3$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2.4.6}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{2.3.4}\\-\frac{1}{2.4.6}\\+\frac{1}{2.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^2\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{4.6}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{3.4}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{4.5.6}\end{matrix}\right\}x\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{4.6}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{3.4}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{4.5.6}\end{matrix}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{-x}{4.6}+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4-\frac{1}{4.5.6}\right)\log.(1-x)$$

$$=\frac{137}{2.4.5.5.6.6}x^5-\frac{77}{3.4.4.5.6}x^4+\frac{141}{2.3.3.4.5.6}x^3-\frac{9}{2.4.5.6}x^2$$

$$+\frac{1}{4.5.6}x+\left(-\frac{1}{4.6}x+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4\right)\log.(1-x).$$

Il che era ecc.

COROLLARIO.

Assumendo, come dianzi, $x=1$, nasce la somma della serie $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{4.5.6.7.8.9}+$ecc.

$$=\frac{137}{2.4.5.5.6.6}-\frac{77}{3.4.4.5.6}+\frac{141}{2.3.3.4.5.6}-\frac{9}{2.4.5.6}+\frac{1}{4.5.6}$$

$$=\frac{1}{1.2.3.4.5.5}.$$

Ecco pertanto il seguente

Prospetto delle Serie di Simpson.

Serie	*Somme*
$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+$ecc.	$=\frac{1}{1.1}$
$\frac{1}{1.2.3.}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+$ecc.	$=\frac{1}{1.2.2}$
$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+$ecc.	$=\frac{1}{1.2.3.3}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6}+\frac{1}{3.4.5.6.7}+$ecc.	$=\frac{1}{1.2.3.4.4}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}+$ecc.	$=\frac{1}{1.2.3.4.5.5}$
$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}+$ecc.	$=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$

Serie *Somme*

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10}+\text{ecc.}\ldots\ldots=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7}$$

ecc. ecc. ecc.

Dal che si vede, che la somma di ciascuna di queste serie non è altro che il primo termine, dove in luogo dell' ultimo fattore del denominatore si ripete il penultimo.

E' cosa per altro assai rimarchevole, e che a primo aspetto sembra impossibile, che queste serie Simpsoniane possono sommarsi con una semplice sottrazione aritmetica della serie proposta da se medesima mutilata del suo primo termine. Un tal modo di operare può vedersi ne' Teoremi seguenti.

Teoremi sulle serie di Simpson.

Dalla serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{ecc.}=S$

togli $S-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{ecc.}$, ed avrai

TEOREMA I.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\text{ecc.}=1$$

Dalla serie $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\text{ecc.}=1$

togli $S-\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{1.2}$,

ed avrai dividendo per 2,

TEOREMA II.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{7.8.9}=\frac{1}{1.2.2}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.2}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2.2.3}$,

ed hai dividendo per 3

TEOREMA III.

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3.4}$,

ed hai dividendo per 4

TEOREMA IV.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8}$

$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$.

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8}$

$+ \frac{1}{5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4.5}$,

ed hai dividendo per 5

TEOREMA V.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8}$
$+ \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$
togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9}$
$+ \frac{1}{5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5.6}$,
ed hai dividendo per 6

TEOREMA VI.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}$
$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$
togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}$
$+ \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6.7}$,
ed hai dividendo per 7

TEOREMA VII.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc}, = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7};$$

ecc. ecc. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA VI.

Sommare la serie $S = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^9}{7.8.9} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Il primo differenziale dell' equazione somministra $dS = dx\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^8}{7.8} + \text{ecc.}\right)$; il secondo dà $ddS = dx^2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ecc.}\right)$; il terzo presenta $d^3S = dx^3(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{ecc.}) = \frac{dx^3}{1 - x^2}$. Ond' è $\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{\frac{1}{2}dx}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1 - x}$. Quindi integrando nasce $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2}\log.(1 + x) - \frac{1}{2}\log.(1 - x)$, senza costante perchè svanisce con x l' uno e l' altro membro dell' equazione. Moltiplico ora per dx, ed ho $\frac{ddS}{dx} = \frac{1}{2}dx\log.(1 + x)$ $- \frac{1}{2}dx\log.(1 - x)$, il di cui integrale è $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}x\log.(1+x)$ $- \int\frac{\frac{1}{2}xdx}{1 + x} - \frac{1}{2}x\log.(1 - x) - \int\frac{\frac{1}{2}xdx}{1 - x} = \frac{1}{2}x\log.(1 + x)$ $- \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1 + x) - \frac{1}{2}x\log.(1 - x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1 - x)$ $= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\log.(1 + x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\log.(1 - x)$, senza costante come dianzi. Moltiplico di nuovo per dx, ed ottengo $S = \left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}xdx\right)\log.(1 + x) + \left(\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}xdx\right)$ $\log.(1 - x)$; e quindi integrando ritrovo $S = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)\times$

$$\log.(1+x)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{2}xdx+\frac{1}{4}x^2dx}{1+x}$$

$$+\int\frac{\frac{1}{2}xdx-\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$$

$$+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log.(1+x)-\frac{1}{8}x^2$$

$$+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\log.(1+x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)+\frac{1}{8}x^2$$

$$+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\log.(1-x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x.$$ Il che era ecc.

COROLLARIO.

Pongasi $x=1$, e sarà la somma della serie $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{7.8.9}+\frac{1}{9.10.11}+$ ecc. $=\log.2-\frac{1}{2}$.

PROBLEMA VII.

Sommare la serie $S=\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^8}{5.6.7.8}+\frac{x^{10}}{7.8.9.10}+$ ecc.

SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione somministra quest' altra $dS=dx\left(\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^7}{5.6.7}+\frac{x^9}{7.8.9}+\text{ecc.}\right)$, cioè pel *Probl. prec.* $dS=dx\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$ $-dx\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}xdx$. Perlochè inte-

grando nasce $S=(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3)\log.(1+x)$
$-\int\frac{\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{4}x^2dx+\frac{1}{12}x^3dx}{1+x}-(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3)\times$
$\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{4}xdx-\frac{1}{4}x^2dx+\frac{1}{12}x^3dx}{1-x}-\frac{1}{4}x^2$
$=(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3)\log.(1+x)-(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3)$
$\log.(1-x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\log.(1+x)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x$
$-\frac{1}{4}\log.(1+x)-\frac{1}{36}x^3+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}\log.(1+x)$
$+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\log.(1-x)-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\log.(1-x)$
$+\frac{1}{36}x^3+\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}\log.(1-x)-\frac{1}{4}x^2$
$=(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3)\log.(1+x)+(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}x$
$+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3)\log.(1-x)-\frac{5}{12}x^2$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Da ciò apparisce che la somma della serie $\frac{1}{1.2.3.4}$
$+\frac{1}{3.4.5.6}+\frac{1}{5.6.7.8}+\frac{1}{7.8.9.10}+\text{ecc.}=\frac{2}{3}\log.2-\frac{5}{12}$.

I precedenti Problemi sono più che bastanti per dare un' adequata idea della maniera, che dee tenersi per determinare la somma delle serie analoghe alle premesse, qualunque sia nel denominatore d'un dato termine quel fattore, che prendesi per primo nel termine susseguente.

ARTICOLO III.

Delle serie infinite delle potenze intere de' numeri naturali co' segni alternanti.

E' proprietà caratteristica di tutte le serie infinite *divergenti*, i di cui termini vanno vie maggiormente aumentandosi di valore quanto più si scostano dal primo, di non ammettere *somma* propriamente detta, non potendo assegnarsi veruna quantità, a cui la serie divergente proposta sia precisamente eguale, o a cui il valor della serie tanto più si avvicini, e ciò oltre ogni data differenza, quanto più termini si prendono della serie. Ma in quella vece si ricorre in questi casi alla *somma impropria* della serie, vale a dire a quella quantità o funzione, qualunque ella sia, la quale, comunque ineguale al valore della data serie, genera però e produce col suo svolgimento mediante i consueti artifizj analitici la serie medesima. Ad una tal classe di serie si riferiscono quelle, che vengono formate dalle potenze intere de' numeri naturali, prese co' segni alternativi, e generalmente rappresentate da

$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + 7^n - 8^n + 9^n -$ ecc. in inf., essendo n un numero intero affermativo qualunque. L' *Eulero* nel suo *Calcolo Differenziale* con un metodo ingegnoso, ma oltremodo lungo e laborioso, determina la quantità o *frazione generatrice* di siffatte serie, e giugne a conseguire le formole seguenti:

I. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ecc. .... $= \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ecc .... $= 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 +$ ecc. .... $= -\frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 +$ ecc. .... $= 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 +$ ecc. .... $= \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 +$ ecc. .... $= 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 +$ ecc. .... $= -\frac{272}{256}$

VIII. $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 +$ ecc. .... $= 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 +$ ecc .... $= \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Ma questo gran Geometra dopo aver ritrovata l' espressione generale della *somma* d' un numero qualunque x di termini della serie proposta, ed aver osservato, che del doppio segno $\pm$, di cui trovasi affetta la detta espressione, dee valere il primo ne' casi di x dispari, il secondo in quelli di x pari, volendo poi farne l' applicazione al caso di x infinito discorre così: *Quod si ergo* (Inst. Calc. Diff. p. 500) x *fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, hæc consideratio cessare debet, ac proinde in summa termini ambigui sunt rejiciendi: unde sequitur, hujusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adjiciendam*. Non pare che un tale ragionamento sia per contentare la corrente de' Geometri, e a più d' uno certamente sembrerà sospetto e precipitoso. Ecco pertanto due differenti semplicissime dimostrazioni delle formole predette.

Dimostrazione I. delle Formole Euleriane.

Essendo $1 - x + x^2 - x^3 +$ ecc. $= \frac{1}{1+x}$, si ha differenziando, e dividendo per dx, $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 +$ ecc. $= -\frac{1}{(1+x)^2}$, e moltiplicando per $-x$,

1.° $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 +$ ecc. $= \frac{x}{(1+x)^2} \cdot (A)$.

Si differenzj parimenti quest' ultima equazione, e si divida per x; e nascerà $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 -$ ecc. $= \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$; e moltiplicando per x,

2.° $x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + 5^2x^5 - 6^2x^6 + \text{ecc.} = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}$. (B).

Si prenda nuovamente il differenzial di queſt' ultima equazione, e dividendo per dx ſi ha $1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - 6^3x^5 + \text{ecc.} = \frac{1-2x}{(1+x)^3} - \frac{3x(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$; onde moltiplicando per x, naſce

3.° $x - 2^3x^2 + 3^3x^3 - 4^3x^4 + \text{ecc.} = \frac{x(1-4x+xx)}{(1+x)^4}$. (C)

Differenzio ora queſta equazione, e divido per dx, ed ottengo $1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-4x+xx-4x+2xx}{(1+x)^4}$

$$- \frac{4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} = \frac{(1-8x+3xx)(1+x) - 4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5}$$

$= \frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5}$; e moltiplicando per x,

4.° $x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + 5^4x^5 - 6^4x^6 + \text{ecc.} = \frac{x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^5}$. (D)

Prendo all' iſteſſo modo il differenziale di queſt' ultima equazione, e divido per dx, dal che ricavo

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-11x+11x^2-x^3-11x+22x^2-3x^3}{(1+x)^5}$$

$$- \frac{5x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^6}$$

$$= \frac{(1-22x+33x^2-4x^3)(1+x) - 5x + 55x^2 + 55x^3 + 5x^4}{(1+x)^6}$$

$= \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{(1+x)^6}$. Quindi moltiplicando per x, ſi trae

5.° $x - 2^5x^2 + 3^5x^3 - 4^5x^4 + 5^5x^5 - 6^5x^6 + \text{eccc.}$

$$= \frac{x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^6}. \ (E)$$

Proſieguo a differenziare l' equazione ora ottenuta, e divido per dx, $1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + 5^6x^4 - \text{ecc.}$

$$= \frac{1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4 - 26x + 132x^2 - 78x^3 + 4x^4}{(1+x)^6}$$

$$- \frac{6x(1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4}{(1+x)^7})$$

$$= \frac{(1-52x+198x^2-104x^3+5x^4)(1+x)-6x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^7}$$

$$= \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}$$. Laonde moltiplicando per x, si trova

6.° $x - 2^6x^2 + 3^6x^3 - 4^6x^4 +$ ecc.

$$= \frac{x(1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5)}{(1+x)^7} \quad (F)$$

Così proseguendo sempre si arriva a ritrovare quante altre si vogliono equazioni analoghe alle precedenti. Se pertanto nelle equazioni ritrovate (*A*), (*B*), (*C*), (*D*), (*E*), (*F*), ecc. si sostituisce l' unità in vece di x, esse si trasformano nelle seguenti

I. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ecc. .... $= \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ecc. .... $= 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 +$ ecc. .... $= - \frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 +$ ecc. .... $= 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 +$ ecc. .... $= \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 +$ ecc. .... $= 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 +$ ecc. .... $= - \frac{272}{256}$

VIII $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 +$ ecc. .... $= 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 +$ ecc. .... $= \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Passo ora a dimostrar questo stesso in una maniera forse più soddisfacente col mezzo delle serie infinite de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, e a tal oggetto premetto i due Lemmi seguenti,

LEMMA I.

Essendo x *un arco qualunque di cerchio descritto col raggio* 1, *si ha* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x +$ ecc. *in inf.* $= -\frac{1}{2}$

DIMOSTRAZIONE.

Pongasi $S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x +$ ecc., e si moltiplichi per $\cos x$, sicchè risulti $S \cos x = \cos x^2 + \cos x \cos 2x + \cos x \cos 3x + \cos x \cos 4x +$ ecc.. Ma si sa dalla Trigonometria, che il prodotto de' coseni di due angoli è uguale alla metà del coseno della somma di detti angoli più la metà del coseno della lor differenza. Dunque risolvendo ciascun prodotto della predetta equazione ne' suoi due termini equivalenti, nasce $S \cos x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ $+ \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) +$ ecc. $= \frac{1}{2}$ $+ \frac{1}{2} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x +$ ecc. $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + S$. Perlochè sarà $S(1 - \cos x) = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2}$, cioè $S = -\frac{1}{2}$. Il che era ecc.

LEMMA II.

La serie infinita $S = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x +$ ecc. *in inf. è uguale all' espressione* $\frac{\operatorname{sen} x}{2(1 - \cos x)}$.

DIMOSTRAZIONE.

Si moltiplichi per $\cos x$ la serie proposta, e si avrà $S \cos x = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} 3x \cos x + \operatorname{sen} 4x \cos x + \operatorname{sen} 5x \cos x +$ ecc. . Ora dati due angoli ϕ, θ,

ϕ, θ, per la teoria delle funzioni angolari si sa, essere $\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\theta = \frac{1}{2}\,\text{sen.}(\phi + \theta) + \frac{1}{2}\,\text{sen.}(\phi - \theta)$; quindi spezzando ciascun termine della predetta equazione in due, risulterà $S\,\text{cos.}\,x = \frac{1}{2}(\text{sen.}\,2x + 0) + \frac{1}{2}(\text{sen.}\,3x + \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,x) + \frac{1}{2}(\text{sen.}\,4x + \text{sen.}\,2x) + \frac{1}{2}(\text{sen.}\,5x + \text{sen.}\,3x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,x + \text{sen.}\,2x + \text{sen.}\,3x + \text{sen.}\,4x + \text{sen.}\,5x + \text{ecc.} = S - \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,x$. Laonde trasponendo sarà $S - S\,\text{cos.}\,x = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,x$, e conseguentemente $S = \frac{\text{sen.}\,x}{2(1 - \text{cos.}\,x)}$. Il che era ecc.

Ciò premesso, si dimostrano speditamente i sopraccennati Teoremi nel modo che segue.

Dimostrazione II. delle formole Euleriane.

N.° I.

Si differenzj la serie del Lemma II., e si divida per $-dx$; da ciò risulta $-\text{cos.}\,x - 2\,\text{cos.}\,2x - 3\,\text{cos.}\,3x - 4\,\text{cos.}\,4x - 5\,\text{cos.}\,5x - 6\,\text{cos.}\,6x - \text{ecc.}$ *in inf* $= \frac{1}{2(1 - \text{cos.}\,x)} = \frac{1}{4\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}x^2}$ (M). Sicchè prendendo per x la semicirconferenza, sarà $\text{cos.}\,x = -1$, $\text{cos.}\,2x = 1$, $\text{cos.}\,3x = -1$, $\text{cos.}\,4x = 1$, $\text{cos.}\,5x = -1$, ecc.; e conseguentemente la serie ritrovata si converte nella *I.*ª

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

N.° II.

Si differenzj due volte la ſerie del Lemma I., e ſi divida il riſultato per dx^2; e ſi ricaverà $- \text{coſ.}\, x - 2^2 \text{coſ.}\, 2x - 3^2 \text{coſ.}\, 3x - 4^2 \text{coſ.}\, 4x - 5^2 \text{coſ.}\, 5x - 6^2 \text{coſ.}\, 6x - \text{ecc.} = 0\ (N)$. Dunque prendendo per l' arco x la ſemicirconferenza ne deriva l' equazione II.[a]

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots = 0$$

N°. III.

Si prenda dell' equazione (*M*) *n°. I.* il ſecondo differenziale, e queſto ſi divida per $-dx^2$. Ciò fatto naſcerà l'equazione

$$- \text{coſ.}\, x - 2^3 \text{coſ.}\, 2x - 3^3 \text{coſ.}\, 3x - 4^3 \text{coſ.}\, 4x - 5^3 \text{coſ.}\, 5x \ldots\ldots - \text{ecc.} = \frac{-1 - 2\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2} x^2}{8\, \text{ſen.}\, \frac{1}{2} x^4}\ (O);$$

la quale nel ſuppoſto di x eguale alla ſemicirconferenza ſi cangia nel Teorema III.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots = -\frac{1}{8}$$

N°. IV.

Allo ſteſſo modo, ſi pigli la ſeconda differenza dell' equazione (*N*) *n°. II*; e ſi divida per $-dx^2$; il che ſomminiſtra l' equazione $- \text{coſ.}\, x - 2^4 \text{coſ.}\, 2x - 3^4 \text{coſ.}\, 3x - 4^4 \text{coſ.}\, 4x - 5^4 \text{coſ.}\, 5x - 6^4 \text{coſ.}\, 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots = 0\ (P)$, e queſta, nella ſuppoſizione di $x = 180°$, diventa la formola IV.

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots = 0$$

N.° V.

Differenziata due volte l' equazione (*O*) del *n.° III.* e diviſa per $-dx^2$, ſi giugne al riſultato

$$- \text{coſ.} x - 2^5 \text{coſ.}\, 2x - 3^5 \text{coſ.}\, 3x - 4^5 \text{coſ.}\, 4x - 5^5 \text{coſ.}\, 5x$$

$$-6^5 \operatorname{cos}. 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots = \frac{2 \operatorname{sen}. \frac{1}{2} x^2 + 13 \operatorname{cos}. \frac{1}{2} x^2 + 2 \operatorname{cos}. \frac{1}{2} x^4}{8 \operatorname{sen}. \frac{1}{2} x^5}$$

(Q); e se in questa si assume al solito x uguale alla semiperiferia, ci si presenta la formola V.

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.} \ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

N.° VI

Prendendo la differenza seconda dell' equazione (P) del *n. IV.*, e dividendola per $-dx^2$, se ne ricava l' equazione $-\operatorname{cos}. x - 2^6 \operatorname{cos}. 2x - 3^6 \operatorname{cos}. 3x - 4^6 \operatorname{cos}. 4x - 5^6 \operatorname{cos}. 5x - 6^6 \operatorname{cos}. 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots = 0\ (R)$. Questa poi mediante la sostituzione della semicirconferenza in luogo di x si trasforma nella formola VI.

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \ldots\ldots = 0$$

Con tal procedere restano prontamente dimostrati tutti i Teoremi Euleriani intorno alle serie delle potenze affermative intere de' numeri naturali co' segni alterni, potendo generalmente stabilirsi, che le serie delle potenze pari hanno per *quantità generatrice* lo zero, e le serie delle potenze dispari hanno per grandezza *generatrice* un numero dato.

Non mi tratterrò qui a far vedere, come con questo stesso metodo altri Teoremi analogi agli Euleriani possono dimostrarsi intorno alle serie delle potenze de' numeri dispari co' segni alterni $1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{ecc.}$, nelle quali all' opposto di quelle de' numeri naturali generalmente si troverà *che le impari sono generate dal zero*, *le pari da un numero determinato*.

ARTICOLO IV.

Della Somma delle Serie de' seni e coseni degli angoli procedenti in progressione aritmetica, e delle loro potestà intere qualunque.

Le elegantissime serie de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, come pure delle potestà intere

omologhe di que' ſeni e coſeni ſono ſtate con molto ſtudio eſaminate ed illuſtrate da' celebri Geometri *Eulero*, *Dan. Bernoulli*, *La Grange*, *D' Alembert*, *Boſſut*, *Lexell*, *Lorgna*, ed altri parecchi; e fra i differenti metodi meſſi in opera per determinarne la loro ſomma, ricavati in buona parte dalla teoria delle ſerie ricorrenti, ſi diſtingue ſopra tutti per la facilità e ſpeditezza quello del Sig. Ab. *Boſſut* pubblicato nelle Memorie *dell' Accad. delle Scienze di Parigi*, per l' anno 1769, il quale può a giuſto titolo chiamarſi un capo d'opera di ſemplicità e d'eleganza. Ma queſto illuſtre Geometra non conſidera la progreſſione aritmetica degli angoli ſotto la forma più generale, nè tampoco (ciò che più importa) applica il ſuo pregevoliſſimo metodo al caſo più univerſale delle potenze de' ſeni e coſeni affette d'un eſponente arbitrario, laſciando deſiderare la parte più intereſſante di queſta ricerca, cioè l' eſpoſizione generale della ſomma pel caſo mentovato: così pure ne' *Supplementi dell' Enciclopedia*, dove queſta materia viene ingegnoſamente trattata in un diſtinto articolo, dopo eſſerſi aſſegnata la ſomma per le due o tre prime poteſtà, ſi tralaſcia il punto più prezioſo e difficile, oſſia il canone per tutte le poteſtà affermative ed intere. Non è mancato per verità chi ſi è ſtudiato di ſupplire a queſta mancanza, ma oltrechè il metodo a tal uopo tenuto ſi appoggia a principj rimoti, e poco familiari, i quali eſigono una lunga eſpoſizione per eſſer ridotti alla comune portata, la forma ſteſſa della generale eſpreſſione della ſomma richieſta non ſi è preſentata ſotto un aſpetto abbaſtanza luminoſo e comodo per non aver nulla a deſiderare di più (*a*). In viſta di ciò non ſembrerà affatto inutile un ulterior tentativo: e il Lettore intelligente giudicherà, ſe io ſia riuſcito a porre tutta queſta materia ſotto un punto di veduta più eſteſo e più generale che finora non ſi è fatto, e ſe la novità de' due ultimi Problemi, e de' quattro Teoremi, che terminano queſt' Articolo, in un ſoggetto da tanti altri maneggiato e diſcuſſo poſſa meritare qualche indulgenza.

(*a*) Si vegga il I. Vol. della *Soc. Italiana* dalla pag. 361 alla pag. 365, ove è ſtato per la prima volta riſoluto in tutta la ſua generalità queſto Problema dal Sig. Cav. *Lorgna*.

PROBLEMA I.

Sommare la serie sen. p + sen. (p + q) + sen. (p + 2q) + sen. (p + 3q) .... + sen. (p + nq) = S

SOLUZIONE.

E' noto, essere $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

$$+ \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(p+2q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+2q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{e^{(p+3q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+3q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}} - e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\Big(1 + e^{q\sqrt{-1}}$$

$$+ e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}}\Big)$$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}}\right).$$

Ora siccome le quantità rinchiuse tra le parentesi sono evidentemente due progressioni geometriche, delle quali conseguentemente si ha la somma con moltiplicare il secondo termine per l' ultimo, sottrarre il quadrato del primo termine, e dividere il residuo pel secondo termine meno il primo; perciò sarà $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{-1}} - 1}\right)$

$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1}\right)$; e riducendo allo stesso

denominatore nasce $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}}-e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right.$$

$$-\frac{e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}-e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}+\frac{e^{(q-p)\sqrt{-1}}-e^{-(q-p)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\left.+\frac{e^{p\sqrt{-1}}-e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right):\left(2-e^{q\sqrt{-1}}-e^{-q\sqrt{-1}}\right)$$

$$=\frac{\text{sen.}(p+nq)-\text{sen.}(p+(n+1)q)+\text{sen.}(q-p)+\text{sen.}p}{2-2\cos.q}$$. Ricorrendo pertanto ai noti Teoremi degli angoli

I. $\text{sen.}a+\text{sen.}b=2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)\cos.\frac{1}{2}(a-b)$

II. $\text{sen.}a-\text{sen.}b=2\cos.\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)$

III. $\cos.a+\cos.b=2\cos.\frac{1}{2}(a+b)\cos.\frac{1}{2}(a-b)$

IV. $\cos.b-\cos.a=2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)$

V. $1-\cos.a=2\,\text{sen.}\frac{1}{2}a^2$, si otterrà facilmente

$$S=\frac{-2\cos.(p+(n+\frac{1}{2})q)\,\text{sen.}\frac{1}{2}q+2\,\text{sen.}\frac{1}{2}q\cos.(p-\frac{1}{2}q)}{4\,\text{sen.}\frac{1}{2}q^2}$$

$$=\frac{\cos.(p-\frac{1}{2}q)-\cos.(p+(n+\frac{1}{2})q)}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}q}$$

$$=\frac{\text{sen.}(p+\frac{1}{2}nq)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(1+n)q}{\text{sen.}\frac{1}{2}q}$$. Il che era ecc.

PROBLEMA II.

Sommare la serie cos. p + cos. (p + q) + cos. (p + 2q) + cos. (p + 3q) . . . . + cos. (p + nq) = S.

SOLUZIONE.

La dottrina degli angoli somministra $S = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}}$
$+ \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+q)\sqrt{-1}}$
$+ \frac{1}{2} e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+2q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{(p+3q)\sqrt{-1}}$
$+ \frac{1}{2} e^{-(p+3q)\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+ \frac{1}{2} e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \Big(1 + e^{q\sqrt{-1}}$
$+ e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}} \Big) + \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}}$
$\Big(1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}} \Big)$
$= \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{1}} - 1} \right)$
$+ \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1} \right)$. Fatta pertanto la riduzione allo stesso denominatore si ottiene speditamente

$$S = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$$

$$= \Big(\frac{1}{2} e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{1}{2} e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{(p-q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{-(p-q)\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \Big) : \Big(2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} \Big)$$

$$= \frac{\text{cof.}\,(p+nq) - \text{cof.}\,(p+(n+1)q) - \text{cof.}\,(p-q) + \text{cof.}\,p}{2 - 2\,\text{cof.}\,q}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p + (n + \frac{1}{2})\,q)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,q - \text{ſen.}\,(p - \frac{1}{2}\,q)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,q}{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,q^2}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p + (n + \frac{1}{2})\,q) - \text{ſen.}\,(p - \frac{1}{2}\,q)}{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,q}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,(p + \frac{1}{2}\,nq)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,(1 + n)\,q}{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,q}$$. Il che era ecc.

COROLL. La ſomma della ſerie $\text{ſen.}\,p + \text{ſen.}\,(p + q) + \text{ſen.}\,(p + 2q) \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\,(p + nq)$ ſta alla ſomma della ſerie $\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,(p + q) + \text{coſ.}\,(p + 2q) \ldots\ldots + \text{coſ.}\,(p + nq)$, come ſta $\text{ſen.}\,(p + \frac{1}{2}\,nq)$ a $\text{coſ.}\,(p + \frac{1}{2}\,nq)$, cioè come $\text{tang.}\,(p + \frac{1}{2}\,nq)$ all' unità. Da ciò appariſce, che la ſomma de' ſeni degli angoli creſcenti in proporzione aritmetica, e continuati per quanti termini ſi vuole, può eſſer uguale in infiniti caſi alla ſomma de' coſeni corriſpondenti, cioè tutte le volte che $p + \frac{1}{2}\,nq = 45°$, il che può verificarſi in infinite maniere. Anzi quelle due ſomme ſaranno parimenti uguali, allorchè, eſſendo π la ſemicirconferenza del cerchio col raggio 1, l' arco $p + \frac{1}{2}\,nq$ avrà uno de' ſeguenti valori

$$\frac{\pi}{4},\ + \frac{5\pi}{4},\ + \frac{9\pi}{4},\ + \frac{13\pi}{4},\ \text{ecc. in inf.}$$

$$- \frac{3\pi}{4},\ - \frac{7\pi}{4},\ - \frac{11\pi}{4},\ - \frac{15\pi}{4},\ \text{ecc. in inf.}$$

PROBLEMA III.

Sommare la ſerie $S = \text{ſen.}\,p^2 + \text{ſen.}\,(p + q)^2 + \text{ſen.}\,(p + 2q)^2 + \text{ſen.}\,(p + 3q)^2 \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\,(p + nq)^2$.

SOLUZIONE.

SOLUZIONE.

Pongasi $e^{p\sqrt{-1}} = a$, $e^{q\sqrt{-1}} = b$; i Teoremi noti degli angoli danno sen. $p^2 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2}{-4} + \frac{a^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$

$$\text{sen.}\,(p+q)^2 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{sen.}\,(p+2q)^2 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{sen.}\,(p+3q)^2 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{-4} + \frac{1}{2}$$

. . . .

$$\text{sen.}\,(p+nq)^2 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{-4} + \frac{1}{2}.$$

Dunque $S = -\frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots + b^{2n})$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots + b^{-2n}) + \frac{1+n}{2},$$

cioè $S = -\frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{1+n}{2}$.

Perlochè ridotti li due termini binomiali allo stesso denominatore, si avrà $S = \frac{1+n}{2} - \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1+n}{2} + \frac{\frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2(p+(n+1)q) + \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2(p-q) - \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2(p+nq) - \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,2p}{2 - 2\,\text{cos.}\,2q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA IV.

Sommare la serie $S = \text{cos.}\,p^2 + \text{cos.}\,(p+q)^2 + \text{cos.}\,(p+2q)^2 + \text{cos.}\,(p+3q)^2 \ldots\ldots\ldots + \text{cos.}\,(p+nq)^2$.

SOLUZIONE

Ritenute le precedenti ſoſtituzioni, ſi fa eſſere

$$\text{coſ.}\, p^2 = \left(\frac{a + a^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\, (p + q)^2 = \left(\frac{ab + a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\, (p + 2q)^2 = \left(\frac{ab^2 + a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\, (p + 3q)^2 = \left(\frac{ab^3 + a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{4} + \frac{1}{2}$$

. . . .

$$\text{coſ.}\, (p + nq)^2 = \left(\frac{ab^n + a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{4} + \frac{1}{2}.$$ Laonde ſcrivendo ordinatamente i termini ſi otterrà $S = \frac{n+1}{2}$

$$+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2+2n} - 1}{b^2 - 1}\right) + \frac{1}{2} a^{-2} \left(\frac{b^{-2-2n} - 1}{b^{-2} - 1}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{4} a^2 (b^{2n} - b^{2+2n} - b^{-2} + 1) + \frac{1}{4} a^{-2} (b^{-2n} - b^{-2-2n} - b^2 + 1)}{2 - b^2 - b^{-2}}$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\text{coſ.}\, 2(p+nq) + \frac{1}{2}\text{coſ.}\, 2p - \frac{1}{2}\text{coſ.}\, 2(p+(n+1)q) - \frac{1}{2}\text{coſ.}\, 2(p-q)}{2 - 2\,\text{coſ.}\, 2q}.$$

Il che era ecc.

COROLL. Se la ſomma trovata ſi aggiugne a quella del Problema III. ſi ha il riſultato $= n + 1$, come appunto eſſer dee, poichè il quadrato di ciaſcun ſeno aggiunto al quadrato del coſeno corriſpondente forma il quadrato del raggio, cioè l' unità.

PROBLEMA V.

Sommare la serie $S = \text{ſen.}\, p^3 + \text{ſen.}\, (p+q)^3 + \text{ſen.}\, (p+2q)^3 + \text{ſen.}\, (p+3q)^3 \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\, (p+nq)^3$.

SOLUZIONE.

$$\text{ſen.}\, p^3 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{a^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3a}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+q)^3 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+2q)^3 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^6}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^2}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-6}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+3q)^3 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^9}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^3}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-9}}{-8\sqrt{-1}}$$

. . . .

$$\text{ſen.}\, (p+nq)^3 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^n}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3n}}{-8\sqrt{-1}}.$$

Quindi risulta $S = -\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}(1 + b^3 + b^6 + b^9 \ldots\ldots\ldots + b^{3n})$

$$+ \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}(1 + b^{-3} + b^{-6} + b^{-9} \ldots\ldots\ldots + b^{-3n})$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots\ldots+b^n)$$

$$-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots\ldots+b^{-n})=$$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3+3n}-1}{b^3-1}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3-3n}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$ Riducendo ora allo stesso denominatore li due primi termini, e così pure i due altri separatamente, ricaveremo $S=$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\,\text{sen.}\,3(p+(n+1)q)+\frac{1}{4}\,\text{sen.}\,3(p-q)-\frac{1}{4}\,\text{sen.}\,3(p+nq)-\frac{1}{4}\,\text{sen.}\,3p}{2-2\,\text{cos.}\,3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\,\text{sen.}\,(p+nq)+\frac{3}{4}\,\text{sen.}\,p-\frac{3}{4}\,\text{sen.}\,(p+(n+1)q)-\frac{3}{4}\,\text{sen.}\,(p-q)}{2-2\,\text{cos.}\,q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Sommare la serie $S=\text{cos.}\,p^3+\text{cos.}\,(p+q)^3+\text{cos.}\,(p+2q)^3+\text{cos.}\,(p+3q)^3\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{cos.}\,(p+nq)^3$.

SOLUZIONE.

$$\text{cos.}\,p^3=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3}{8}+\frac{3a}{8}+\frac{3a^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}}{8}$$

$$\text{cos.}\,(p+q)^3=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^3}{8}+\frac{3ab}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-3}}{8}$$

$$\text{cos.}\,(p+2q)^3=\left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^6}{8}+\frac{3ab^2}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-2}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-6}}{8}$$

$$\text{cof.}\,(p+3q)^3 = \left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^3 = \frac{a^3b^9}{8} + \frac{3ab^3}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-9}}{8}$$

. . . .

$$\text{cof.}\,(p+nq)^3 = \left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{8} + \frac{3ab^n}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-3n}}{8}.$$

Sarà perciò $S = \frac{1}{8}a^3(1+b^3+b^6+b^9 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{3n})$

$$+\frac{1}{8}a^{-3}(1+b^{-3}+b^{-6}+b^{-9}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{-3n})$$

$$+\frac{3a}{8}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots\ldots+b^n)$$

$$+\frac{3a^{-1}}{8}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{-n})$$

$$=\frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n+3}-1}{b^3-1}\right)+\frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n-3}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)+\frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)+\frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)+\frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\,\text{cof.}\,3(p+nq)+\frac{1}{4}\,\text{cof.}\,3p-\frac{1}{4}\,\text{cof.}\,3\big(p+(n+1)q\big)-\frac{1}{4}\,\text{cof.}\,3(p-q)}{2-2\,\text{cof.}\,3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\,\text{cof.}\,(p+nq)+\frac{3}{4}\,\text{cof.}\,p-\frac{3}{4}\,\text{cof.}\,\big(p+(n+1)q\big)-\frac{3}{4}\,\text{cof.}\,(p-q)}{2-2\,\text{cof.}\,q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la serie $S = \text{fen.}\,p^4 + \text{fen.}\,(p+q)^4 + \text{fen.}\,(p+2q)^4 + \text{fen.}\,(p+3q)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{fen.}\,(p+nq)^4$.

SOLUZIONE.

$$\text{sen.}\, p^4 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{4a^2}{16} - \frac{4a^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{sen.}\, (p+q)^4 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^4}{16} - \frac{4a^2b^2}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{sen.}\, (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^8}{16} - \frac{4a^2b^4}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-4}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-8}}{16} + \frac{6}{16}.$$

$$\text{sen.}\, (p+3q)^4 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{12}}{16} - \frac{4a^2b^6}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-6}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-12}}{16} + \frac{6}{16}$$

. . . .

$$\text{sen.}\, (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} - \frac{4a^2b^{2n}}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}.$$

Sarà dunque $S = \frac{1}{16}a^4(1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots\ldots + b^{4n})$

$$+ \frac{1}{16}a^{-4}(1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$- \frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$- \frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{6(1+n)}{16} = \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1}\right) + \frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1}\right)$$

$$- \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{6(n+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}}\right)$$

$$+\frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n}-b^{-4n-4}-b^{4}+1}{2-b^{4}-b^{-4}}\right)-\frac{1}{4}a^{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{2n+2}-b^{-2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)$$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n}-b^{-2n-2}-b^{2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)+\frac{3(n+1)}{8}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\operatorname{cof.}4(p+nq)+\frac{1}{8}\operatorname{cof.}4p-\frac{1}{8}\operatorname{cof.}4\big(p+(n-1)q\big)-\frac{1}{8}\operatorname{cof.}4(p-q)}{2-2\operatorname{cof.}4q}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\operatorname{cof.}2(p+(n+1)q)+\frac{1}{2}\operatorname{cof.}2(p-q)-\frac{1}{2}\operatorname{cof.}2(p+nq)-\frac{1}{2}\operatorname{cof.}2p}{2-2\operatorname{cof.}2q}$$

$+\frac{3(n+1)}{8}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VIII.

Sommare la ferie $S=\operatorname{cof.}p^{4}+\operatorname{cof.}(p+q)^{4}+\operatorname{cof.}(p+2q)^{4}+\operatorname{cof.}(p+3q)^{4}\ldots\ldots\ldots+\operatorname{cof.}(p+nq)^{4}$

SOLUZIONE.

Procedendo fempre come dianzi, fi ha

$$\operatorname{cof.}p^{4}=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}}{16}+\frac{4a^{2}}{16}+\frac{4a^{-2}}{16}+\frac{a^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\operatorname{cof.}(p+q)^{4}=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{4}}{16}+\frac{4a^{2}b^{2}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\operatorname{cof.}(p+2q)^{4}=\left(\frac{ab^{2}+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{8}}{16}+\frac{4a^{2}b^{4}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-4}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-8}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\operatorname{cof.}(p+3q)^{4}=\left(\frac{ab^{3}+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{12}}{16}+\frac{4a^{2}b^{6}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-6}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-12}}{16}+\frac{6}{16}$$

. . . .

$$\operatorname{cof.}(p+nq)^{4}=\left(\frac{ab^{n}+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{4n}}{16}+\frac{4a^{2}b^{2n}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-4n}}{16}+\frac{6}{16}.$$

Perlochè raccolti i termini a dovere, se ne ricava

$$S = \frac{6}{16} a^4 (1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots\ldots + b^{4n})$$

$$+ \frac{1}{16} a^{-4} (1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8} = \frac{1}{16} a^4 \left(\frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left(\frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1} \right) + \frac{3(n+1)}{8}.$$

Dunque riducendo al comune denominatore i due primi termini, non meno che i due susseguenti, risulterà

$$S = \frac{1}{16} a^4 \left(\frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left(\frac{b^{-4n} - b^{-4n-4} - b^4 + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right)$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \text{cos. } 4(p+nq) + \frac{1}{8} \text{cos. } 4p - \frac{1}{8} \text{cos. } 4(p+(n+1)q) - \frac{1}{8} \text{cos. } 4(p-q)}{2 - 2 \text{ cos. } 4q}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \text{cos. } 2(p+nq) + \frac{1}{2} \text{cos. } 2p - \frac{1}{2} \text{cos. } 2(p+(n+1)q) - \frac{1}{2} \text{cos. } 2(p-q)}{2 - 2 \text{ cos. } 2q}$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8}.$$ Il che era ecc.

PROBLEMA IX.

Sommare la serie $S =$ sen. $\mathrm{p}^m +$ sen. $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^m +$ sen. $(\mathrm{p}+2\mathrm{q})^m$ $+$ sen. $(\mathrm{p}+3\mathrm{q})^m \ldots\ldots +$ sen. $(\mathrm{p}+\mathrm{rq})^m$; *posto l' esponente* m *eguale ad un numero qualunque intero affermativo*.

SOLUZIONE.

SOLUZIONE.

Caso I. di m *dispari*.

E' noto dalla Trigonometria Analitica, e dalla teoria delle funzioni circolari, essere

1.° $\text{sen}.p^m = \pm \frac{\text{sen}.mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m\,\text{sen}.(m-2)p}{2^{m-1}} \pm \frac{m.m-1.\text{sen}.(m-4)p}{2^{m-1}.1.2}$

$\mp \frac{m.m-1.m-2.\text{sen}.(m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3} \ldots\ldots + \frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\text{sen}.p}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}$

$= \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m - a^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} - a^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} - a^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} - a^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)$; in questa formola, come nelle susseguenti, vagliono i segni superiori nell' ipotesi di $m = 4\lambda + 1$, e gl' inferiori nel supposto di $m = 4\lambda - 1$, essendo λ un numero intero qualunque.

2.° $\text{sen}.(p+q)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^m - a^{-m} b^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{m-2} - a^{2-m} b^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} b^{m-4} - a^{4-m} b^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{m-6} - a^{6-m} b^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab - a^{-1} b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)$.

3.° $\text{sen}.(p+2q)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^{2m} - a^{-m} b^{-2m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{2(m-2)} - a^{2-m} b^{2(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)} - a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)} - a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^{2} - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

4.° $$\text{sen.}(p+rq)^{m} = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m}b^{rm} - a^{-m}b^{-rm}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2}b^{r(m-2)} - a^{2-m}b^{r(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{r(m-4)} - a^{4-m}b^{r(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{r(m-6)} - a^{6-m}b^{r(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^{r} - a^{-1}b^{-r}}{2\sqrt{-1}}\right).$$ Dunque raccogliendo i termini corrispondenti si ha

$$S = \pm \frac{a^{m}}{2^{m}\sqrt{-1}}(1 + b^{m} + b^{2m} + b^{3m}\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{rm})$$

$$\mp \frac{a^{-m}}{2^{m}\sqrt{-1}}(1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m}\ldots\ldots\ldots + b^{-rm})$$

$$\mp \frac{ma^{m-2}}{2^{m}\sqrt{-1}}(1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)}\ldots\ldots\ldots + b^{r(m-2)})$$

$$\pm \frac{ma^{2-m}}{2^{m}\sqrt{-1}}(1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)}\ldots\ldots\ldots + b^{r(2-m)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2}(1 + b^{m-4} + b^{2(m-4)} + b^{3(m-4)}\ldots\ldots\ldots + b^{r(m-4)})$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2}(1 + b^{4-m} + b^{2(4-m)} + b^{3(4-m)}\ldots + b^{r(4-m)})$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2.3}(1 + b^{m-6} + b^{2(m-6)} + b^{3(m-6)}\ldots\ldots + b^{r(m-6)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2.3}(1 + b^{6-m} + b^{2(6-m)} + b^{3(6-m)}\ldots\ldots + b^{r(6-m)})$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}(1+b+b^2+b^3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,+b^r)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\,.\,.\,.\,.\,.+b^{-r}).$$

Dunque $S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^m-1})$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1})\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{(m-2)(r+1)}-1}{b^{m-2}-1})$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{-(m-2)(r+1)}-1}{b^{2-m}-1})$$

$$\pm\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1})$$

$$\mp\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}(\frac{b^{(4-m)(r+1)}-1}{b^{4-m}-1})$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}(\frac{b^{r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1})$$

$$\pm\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}(\frac{b^{(6-m)(r+1)}-1}{b^{6-m}-1})\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}(\frac{b^{r+1}-1}{b-1})$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}).$$ Riducendo ora ciascuna coppia di termini separatamente al comune denominatore si conseguisce

$$S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{rm}-b^{rm+m}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}})$$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{-rm}-b^{-rm-m}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}})$$

$$\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}})$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}(\frac{b^{-r(m-2)}-b^{-(r+1)(m-2)}-b^{m-2}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)}-b^{(r+1)(m-4)}-b^{4-m}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)}-b^{-(r+1)(m-4)}-b^{m-4}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)}-b^{(r+1)(m-6)}-b^{6-m}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)}-b^{-(r+1)(m-6)}-b^{m-6}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2.\dots\dots\dots a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\dots\dots\dots\dots}\left(\frac{b^r-b^{r+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\dots\dots\dots\dots a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\dots\dots\dots}\left(\frac{b^{-r}-b^{-r-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\pm\frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{sen.}\,m(p+rq)-\text{sen.}\,m(p+(r+1)q)-\text{sen.}\,m(p-q)+\text{sen.}\,mp}{1-\text{cos.}\,mq}\right)$$

$$\mp\frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{sen.}\,(m-2)(p+rq)-\text{sen.}\,(m-2)(p+(r+1)q)-\text{sen.}\,(m-2)(p-q)+\text{sen.}\,(m-2)p}{1-\text{cos.}\,(m-2)q}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{sen.}\,(m-4)(p+rq)-\text{sen.}\,(m-4)(p+(r+1)q)-\text{sen.}\,(m-4)(p-q)+\text{sen.}\,(m-4)p}{1-\text{cos.}\,(m-4)q}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(\frac{\text{sen.}(m-6)(p+rq)-\text{sen.}\,(m-6)(p+(r+1)q)-\text{sen.}\,(m-6)(p-q)+\text{sen.}\,(m-6)p}{1-\text{cos.}\,(m-6)q}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\dots\dots}{2^m.1.2.3\dots\dots}\left(\frac{\text{sen.}\,(p+rq)-\text{sen.}\,(p+(r+1)q)-\text{sen.}\,(p-q)+\text{sen.}\,p}{1-\text{cos.}\,q}\right);$$

qui vale la regola data da principio in ordine ai segni. Il che era ecc.

Caso II. di m *pari.*

La dottrina delle Funzioni circolari ci dà l'equazioni seguenti

$$\text{I.°}\ \text{sen.}\ p^m = \pm\frac{\text{cos.}\,mp}{2^{m-1}}\mp\frac{m\,\text{cos.}\,(m-2)p}{2^{m-1}}$$

$$\pm\frac{m.m-1.\,\text{cos.}\,(m-4)p}{2^{m-1}.1.2}\mp\frac{m.m-1.m-2\,\text{cos.}\,(m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3}\dots\dots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right)\text{cos.}(m-m)p = \pm\left(\frac{a^m+a^{-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}+a^{2-m}}{2^m}\right) \pm m.m-1\left(\frac{a^{m-4}+a^{4-m}}{2^m.1.2}\right)$$

$$\mp m.m-1.m-2.\left(\frac{a^{m-6}+a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right);$$ in questa formola, come nelle susseguenti, si adoprano i segni superiori quando $m=4\lambda$, e gl' inferiori allorchè $m=4\lambda-2$, preso per λ qualsivoglia numero intero affermativo.

2.° $\text{sen.}(p+q)^m = \pm\frac{\text{cos.}\,m(p+q)}{2^{m-1}} \mp \frac{m\,\text{cos.}(m-2)(p+q)}{2^{m-1}}$

$$\pm\frac{m.m-1.\,\text{cos.}(m-4)(p+q)}{2^{m-1}.1.2} \mp \frac{m.m-1.m-2.\,\text{cos.}(m-6)(p+q)}{2^{m-1}.1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\right) = \pm\left(\frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{m-2}+a^{2-m}b^{2-m}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{m-4}+a^{4-m}b^{4-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{m-6}+a^{6-m}b^{6-m}}{2^m}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots}\right).$$

3.° $\text{sen.}(p+2q)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{2m}+a^{-m}b^{-2m}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{2(m-2)}+a^{2-m}b^{2(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)}+a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)}+a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\,........}{2^{m-1}.1.2.3\,........}\right).$$

4.° sen. $(p+3q)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{3m} + a^{-m} b^{-3n}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2} b^{3(m-2)} + a^{2-m} b^{3(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{n-4} b^{3(m-4)} + a^{4-m} b^{3(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{n-6} b^{3(m-6)} + a^{6-m} b^{3(6-m)}}{2^m}\right).......$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3.......}{2^{m-1}.1.2.3.4.....}\right).$$

5.° sen. $(p+rq)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{rn} + a^{-m} b^{-rm}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2} b^{r(n-2)} + a^{2-m} b^{r(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{n-4} b^{r(n-4)} + a^{4-m} b^{r(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{r(m-6)} + a^{6-m} b^{r(6-m)}}{2^m}\right).....$$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2...}{2^{m-1}.1.2.3...}\right)$. Dunque diſtribuendo, come conviene, i termini delle precedenti equazioni, ſi giugne alla ſomma

$$S = \pm\frac{a^m}{2^m}\quad(1 + b^m + b^{2m} + b^{3m}\,............ + b^{rm})$$

$$\pm\frac{a^{-m}}{2^m}\quad(1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3n}\,....... + b^{-rm})$$

$$\mp\frac{ma^{n-2}}{2^m}(1 + b^{m-2} + b^{2(n-2)} + b^{3(n-2)}\,.... + b^{r(m-2)})$$

$$\mp\frac{ma^{2-m}}{2^m}(1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)}\,.... + b^{r(2-m)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{n-4}}{2^m.1.2}(1+b^{n-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots\ldots+b^{r(4-m)})$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)})$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)})$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)=$$

$$\pm \frac{a^n}{2^m}\left(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^n-1}\right)\pm\frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{n-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{n-2}-1}\right)\mp\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{n-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{-m-6}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . .

$$+\frac{(1+r)}{2}\left(\frac{m.m-1.m-1.m-3\ldots\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots\ldots}\right).$$ Perlochè riducendo questi termini di due in due allo stesso denominatore, si trova risultarne

$$S=\pm\frac{a^n}{2^m}\left(\frac{b^{rn}-b^{(r+1)}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-n}}\right)$$

$$\pm\frac{a^{-m}}{2^n}\left(\frac{b^{-rn}-b^{-n(r+1)}-b^n+1}{2-b^{\ }-b^{-\ }}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{n-2}}{2^m}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{n-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3....}{2^{m-1}.1.2.3.4....}\right) =$$

$$\pm \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{cos. } m(p+rq) - \text{cos. } m(p+(r+1)q) - \text{cos. } m(p-q) + \text{cos. } mp}{1 - \text{cos. } mq}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{cos. }(m-2)(p+rq) - \text{cos.}(m-2)(p+(r+1)q) - \text{cos. }(m-2)(p-q) + \text{cos. }(m-2)p}{1 - \text{cos. }(m-2)q}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{cos. }(m-4)(p+rq) - \text{cos. }(m-4)(p+(r+1)q) - \text{cos. }(m-4)(p-q) + \text{cos. }(m-4)p}{1 - \text{cos. }(m-4)q}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3.}\left(\frac{\text{cos. }(m-6)(p+rq) - \text{cos. }(m-6)(p+(r+1)q) - \text{cos. }(m-6)(p-q) + \text{cos. }(m-6)p}{1 - \text{cos. }(m-6)q}\right)$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ .....}{2^{m-1}.1.2.3.4.....}\right).$$ Il che era ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la serie $S = \text{cos. p}^m + \text{cos. }(p+q)^m + \text{cos. }(p+2q)^m + \text{cos. }(p+3q)^m \ldots\ldots + \text{cos. }(p+rq)^m$.

SOLUZIONE.

SOLUZIONE.

Caso I. di m *dispari*

Dall' Analisi Trigonometrica ci viene somministrato,

I.° $\cos. p^m = \frac{\cos. mp}{2^{m-1}} + \frac{m \cos. (m-2)p}{2^{m-1}} + \frac{m.m-1.\cos.(m-4)p}{2^{m-1}\,1.2.}$

$+ \frac{m.m-1.m-2.\cos.(m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3} \dots\dots\dots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3\dots\dots\cos. p}{2^{m-1}.1.2.3.\dots\dots}$

$= \frac{a^m + a^{-m}}{2^m} + m\left(\frac{a^{m-2} + a^{2-m}}{2^m}\right) + \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} + a^{4-m})$

$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} + a^{6-m})\dots\dots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.\dots\dots}{2^m.1.2.3\dots\dots}(a + a^{-1}).$

2.° $\cos. (p+q)^m = \frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2}$

$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{m-2} + a^{2-m} b^{2-m})$

$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} b^{m-4} + a^{4-m} b^{4-m})$

$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} b^{m-6} + a^{6-m} b^{6-m})\dots\dots\dots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3\dots\dots}{2^m.2.3.4.\dots\dots\dots\dots\dots}(ab + a^{-1} b^{-1}).$

3.° $\cos. (p+2q)^m = \frac{a^m b^{2m} + a^{-m} b^{-2m}}{2^m}$

$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{2(m-2)} + a^{2-m} b^{2(2-m)})$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(a^{m-4}b^{2(m-4)}+a^{4-m}b^{2(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(a^{m-6}b^{2(m-6)}+a^{6-m}b^{2(6-m)}\right)\ldots.$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots.}{2^m.1.2.3\ldots.}\left(ab^2+a^{-1}b^{-2}\right)$$

4.° coſ. $(p+3q)^m=\frac{a^m b^{3m}+a^{-m}b^{-3m}}{2^m}$

$$+\frac{m}{2^m}\left(a^{m-2}b^{3(m-2)}+a^{2-m}b^{3(2-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(a^{m-4}b^{3(m-4)}+a^{4-m}b^{3(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(a^{m-6}b^{3(m-6)}+a^{6-m}b^{3(6-m)}\right)\ldots.$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^m.1.2.3\ldots}\left(ab^3+a^{-1}b^{-3}\right).$$

5°. coſ. $(p+rq)^m=\frac{a^m b^{rm}+a^{-m}b^{-rm}}{2^m}$

$$+\frac{m}{2^m}\left(a^{m-2}b^{r(m-2)}+a^{2-m}b^{r(2-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(a^{m-4}b^{r(m-4)}+a^{4-m}b^{r(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(a^{m-6}b^{r(m-6)}+a^{6-m}b^{r(6-m)}\right)\ldots.$$

$+\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots}{2^m.1.2.3.4\ldots}\left(ab^r+a^{-1}b^{-r}\right)$. Sicchè ordinando per ſerie diſtinte i termini corriſpondenti, naſce

$$S=\frac{a^m}{2^m}\left(1+b^m+b^{2m}+b^{3m}\ldots..+b^{rm}\right)$$

$$+\frac{a^{-m}}{2^m}\left(1+b^{-m}+b^{-2m}+b^{-3m}\ldots.+b^{-rm}\right)$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(1+b^{m-2}+b^{2(m-2)}+b^{3(m-2)}\ldots.+b^{r(m-2)}\right)$$

$$+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(1+b^{2-m}+b^{2(2-m)}+b^{3(2-m)}\ldots+b^{r(2-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(1+b^{m-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots+b^{r(m-4)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots+b^{r(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots+b^{r(m-6)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots+b^{r(6-m)}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots}\left(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots+b^r\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots+b^{-r}\right)$$

$$=\frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)m}-1}{b^m-1}\right)+\frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-(r+1)m}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{m-2}-1}\right)+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.23\ldots\ldots}\left(\frac{b^{(r+1)}-1}{b-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$

Se ora ciascuna coppia di tali termini viene portata sotto un comune denominatore, ne risulta

$$S = \frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{rm} - b^{(r+1)m} - b^{-m} + 1}{2 - b^m - b^{-m}}\right)$$

$$+ \frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-rm} - b^{-(r+1)m} - b^m + 1}{2 - b^m - b^{-m}}\right)$$

$$+ \frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{r(m-2)} - b^{(r+1)(m-2)} - b^{2-m} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}}\right)$$

$$+ \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(6-m)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,.\,a}{2^m.1.2.3\,.\,.\,.\,.}\left(\frac{b^{r} - b^{r+1} - b^{-1} + 1}{2 - b - b^{-1}}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.\,.\,.\,a^{-1}}{2^m.1.2.3\,.\,.\,.\,.}\left(\frac{b^{-r} - b^{-r-1} - b + 1}{2 - b - b^{-1}}\right).$$ Sic-

chè fatte le debite sostituzioni, ne viene finalmente

$$S = \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{cos. } m(p+rq) - \text{cos. } m(p+(r+1)q) - \text{cos. } m(p-q) + \text{cos. } mp}{1 - \text{cos. } mq}\right)$$

$$+ \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{cos.}(m-2)(p+rq) - \text{cos.}(m-2)(p+(r+1)q) - \text{cos. }(m-2)(p-q) + \text{cos. }(m-2)p}{1 - \text{cos. }(m-2)q}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{cos.}(m-4)(p+rq) - \text{cos. }(m-4)(p+(r+1)q) - \text{cos. }(m-4)(p-q) + \text{cos.}(m-4)p}{1 - \text{cos. }(m-4)q}\right)$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(\frac{\text{cos. }(m-6)(p+rq) - \text{cos. }(m-6)(p+(r+1)q) - \text{cos.}(m-6)(p-q) + \text{cos. }(m-6)p}{1 - \text{cos. }(m-6)q}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\,.\,.\,.}{2^m.1.2.3\,.\,.\,.}\left(\frac{\text{cos. }(p+rq) - \text{cos. }(p+(r+1)q) - \text{cos. }(p-q) + \text{cos. } p}{1 - \text{cos. } q}\right)$$

Il che era ecc.

Caso II. di m *pari.*

In questa suppofizione dell' esponente m pari il valore di cos. p^m non differisce dal precedente se non nell' ultimo termine, il quale trovasi libero da cos. p, e veste questa forma $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$, e questo termine rimane inalterabile nell' espressione del valore della potenza m di qualunque altro coseno. E' dunque bastantemente chiaro, che il calcolo da farsi in questo caso non è punto diverso dal già fatto nel caso di m dispari, avendo soltanto riguardo, che nel precedente valore della somma S in vece dell' ultimo termine si dee prendere $r+1$ volte la frazione $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$, il che dà la stessa somma già trovata S mutilata dell' ultimo termine, ed accresciuta di $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1.r+1.}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$. Il che era ecc.

PROBLEMA XI.

Preso ϕ *per l' arco di cerchio descritto col raggio* $=1$, ed m, n *due numeri qualunque o positivi o negativi; cercasi la somma* $S = m$ sen. $m\phi + (m+n)$ sen. $(m+n)\phi$ $+ (m+2n)$ sen. $(m+2n)\phi + (m+3n)$ sen. $(m+3n)\phi\ldots$ $+ (m+rn)$ sen. $(m+rn)\phi$, *essendo* r *qualunque intero affermativo.*

SOLUZIONE.

Dal Probl. II. si ha cos. $m\phi +$ cos. $(m+n)\phi +$ cos. $(m+2n)\phi$ $+$ cos. $(m+3n)\phi + \ldots\ldots +$ cos. $(m+rn)\phi$ $= \frac{\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\phi\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}n\phi}$. Quindi prendendo i differenziali nasce $-md\phi$ sen. $m\phi - (m+n)\,d\phi$ sen. $(m+n)\phi$ $-(m+2n)\,d\phi$ sen. $(m+2n)\phi - (m+3n)\,d\phi$ sen. $(m+3n)\phi\ldots$ $-(m+rn)\,d\phi$ sen. $(m+rn)\phi =$

$-\left(\left(m+\frac{1}{2}rn\right)d\phi\,\text{fen.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi\right.$

$-\frac{1}{2}(r+1)nd\phi\,\text{cof.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{cof.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi$

$\left.+\frac{1}{2}nd\phi\,\text{cof.}\frac{1}{2}n\phi\,\text{cof.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\right):\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi^2$,

e dividendo per $-d\phi$, ne proviene $m\,\text{fen.}\,m\phi$ $+(m+n)\,\text{fen.}(m+n)\phi+(m+2n)\,\text{fen.}(m+2n)\phi$ $+(m+3n)\,\text{fen.}(m+3n)\phi\ldots+(m+rn)\,\text{fen.}(m+rn)\phi=$

$\left(\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\text{fen.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi\right.$

$-\frac{1}{2}(r+1)n\,\text{cof.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{cof.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi$

$\left.+\frac{1}{2}n\,\text{cof.}\frac{1}{2}n\phi\,\text{cof.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\right):\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi^2$.

Il che era ecc.

PROBLEMA XII.

Sommare la ferie $S=m\,\text{cof.}\,m\phi+(m+n)\,\text{cof.}(m+n)\phi$ $+(m+2n)\,\text{cof.}(m+2n)\phi+(m+3n)\,\text{cof.}(m+3n)\phi\ldots$ $+(m+rn)\,\text{cof.}(m+rn)\phi$.

SOLUZIONE

Il Probl. I. fomminiftra l'equazione $\text{fen.}\,m\phi+\text{fen.}(m+n)\phi$ $+\text{fen.}(m+2n)\phi+\text{fen.}(m+3n)\phi\ldots+\text{fen.}(m+rn)\phi=$ $\dfrac{\text{fen.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi}$, la quale differenziata, e divifa per $d\phi$, diventa $m\,\text{cof.}\,m\phi+(m+n)\,\text{cof.}(m+n)\phi$ $+(m+2n)\,\text{cof.}(m+2n)\phi+(m+3n)\,\text{cof.}(m+3n)\phi\ldots\ldots$ $+(m+rn)\,\text{cof.}(m+rn)\phi=$

$\left(\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\text{cof.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi\right.$

$+\frac{1}{2}(r+1)n\,\text{cof.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,\text{fen.}\left(m+\frac{1}{2}rn\right)\phi\,\text{fen.}\frac{1}{2}n\phi$

$-\frac{1}{2}n\,\text{cos}.\frac{1}{2}n\phi\,\text{sen}.(m+\frac{1}{2}rn)\phi\,\text{sen}.\frac{1}{2}(r+1)n\phi\,):\text{sen}.\frac{1}{2}n\phi^2.$

Il che era ecc.

Corollario.

Applicando il metodo da me esposto in questi due ultimi Problemi alle serie quivi sommate, cioè differenziando le medesime, egli è manifesto, che si otterrà la somma così de' seni come de' coseni degli angoli aritmeticamente crescenti, anche quando ciascuno di essi verrà moltiplicato pel quadrato del numero moltiplice dell'angolo. E così sempre operando, si giungerà sempre a determinare la somma di siffatte serie quand' anche ciascun seno e coseno venga moltiplicato per qualsivoglia potestà intera del numero moltiplice dell' angolo respettivo. E perciò saranno sempre sommabili le due serie

I°. $m^\lambda\,\text{sen}.m\phi+(m+n)^\lambda\,\text{sen}.(m+n)\phi$
$+(m+2n)^\lambda\,\text{sen}.(m+2n)\phi+(m+3n)^\lambda\,\text{sen}.(m+3n)\phi$
$\ldots\ldots+(m+rn)^\lambda\,\text{sen}.(m+rn)\phi$

II°. $m^\lambda\,\text{cos}.\,m\phi+(m+n)^\lambda\,\text{cos}.\,(m+n)\phi$
$+(m+2n)^\lambda\,\text{cos}.\,(m+2n)\phi+(m+3n)^\lambda\,\text{cos}.(m+3n)\phi\ldots\ldots$
$+(m+rn)^\lambda\,\text{cos}.(m+rn)\phi$, preso per λ qualunque numero intero affermativo. In fatti chiamata S' la prima di queste due serie, S'' la seconda, se si prende P per indicare la somma già trovata di $\text{sen}.m\phi+\text{sen}.(m+n)\phi$ $+\text{sen}.\,(m+2n)\phi\ldots.\,\text{sen}.\,(m+rn)\phi$, e $\mathfrak{Q}$ per denotare la somma nota di $\text{cos}.m\phi+\text{cos}.(m+n)\phi+\text{cos}.\,(m+2n)\phi\ldots$ $+\text{cos}.(m+rn)\phi$, si otterranno i seguenti Teoremi.

Caso I. di λ pari

Teorema I°.

$$S'=\pm\frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

Teorema II°.

$$S''=\pm\frac{d^\lambda \mathfrak{Q}}{d\phi^\lambda}.$$

In questi due Teoremi i segni superiori vagliono per tutti i numeri pari divisibili per 4, gl' inferiori per li non divisibili.

Caso II. di λ dispari

TEOREMA III°.

$$S' = \pm \frac{d^\lambda Q}{d\phi^\lambda}.$$

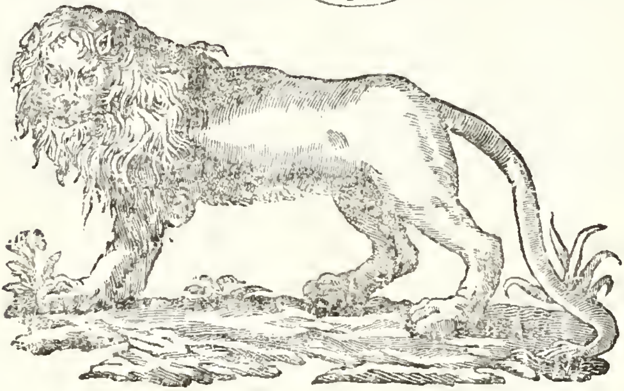
TEOREMA IV°.

$$S'' = \pm \frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

Pel Teorema 3°. vale il segno superiore quando il numero λ è della forma $4n - 1$, essendo n qualunque intero a cominciare dall' unità; vale poi il segno inferiore allorchè λ ha la forma $4n + 1$, essendo n qualunque intero, ed anche zero.

Nel Teorema 4°. si adopra il segno superiore tutte le volte che λ è $= 4n + 1$, essendo n un intero qualunque, ed anche zero; e si usa il segno inferiore qualora λ è $= 4n - 1$, preso per n qualunque intero, escluso il zero.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY



NUOVA

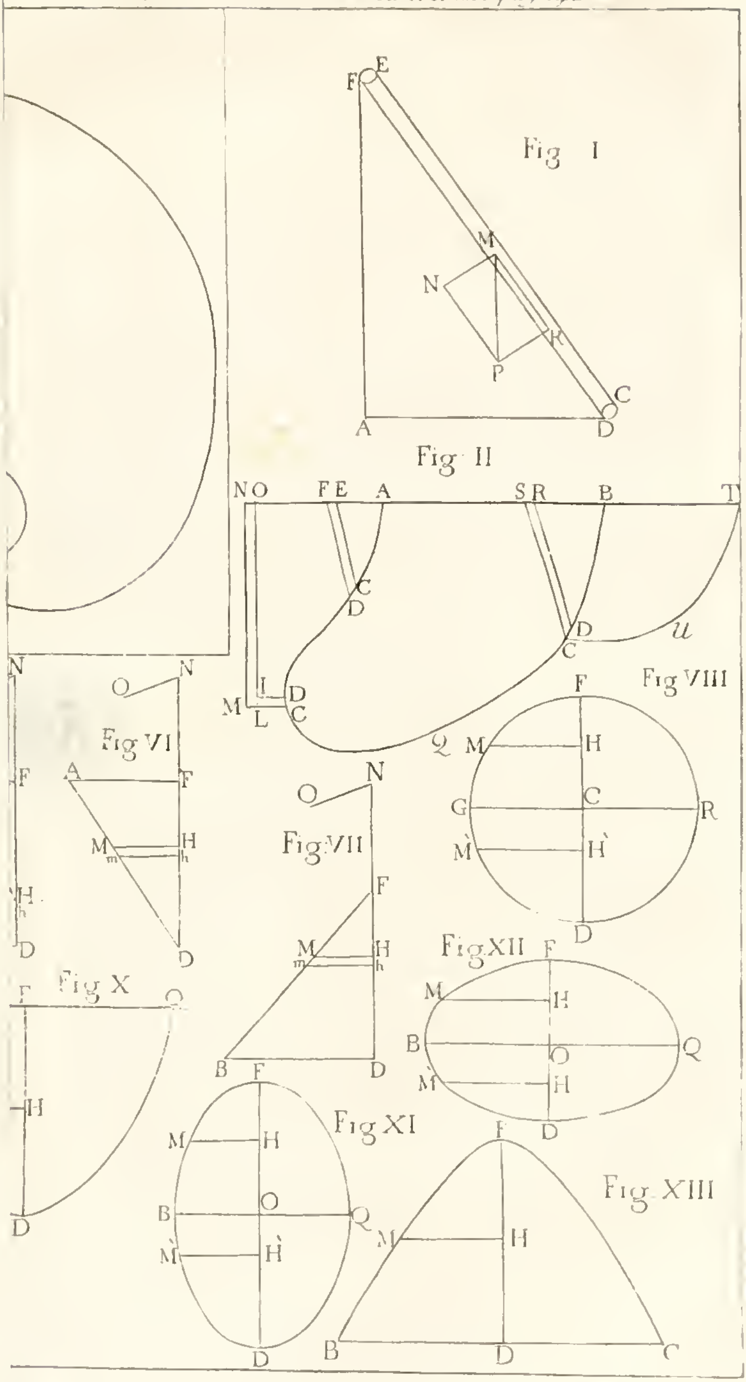


Fig I
Fig II
Fig VI
Fig VII
Fig VIII
Fig X
Fig XI
Fig XII
Fig XIII

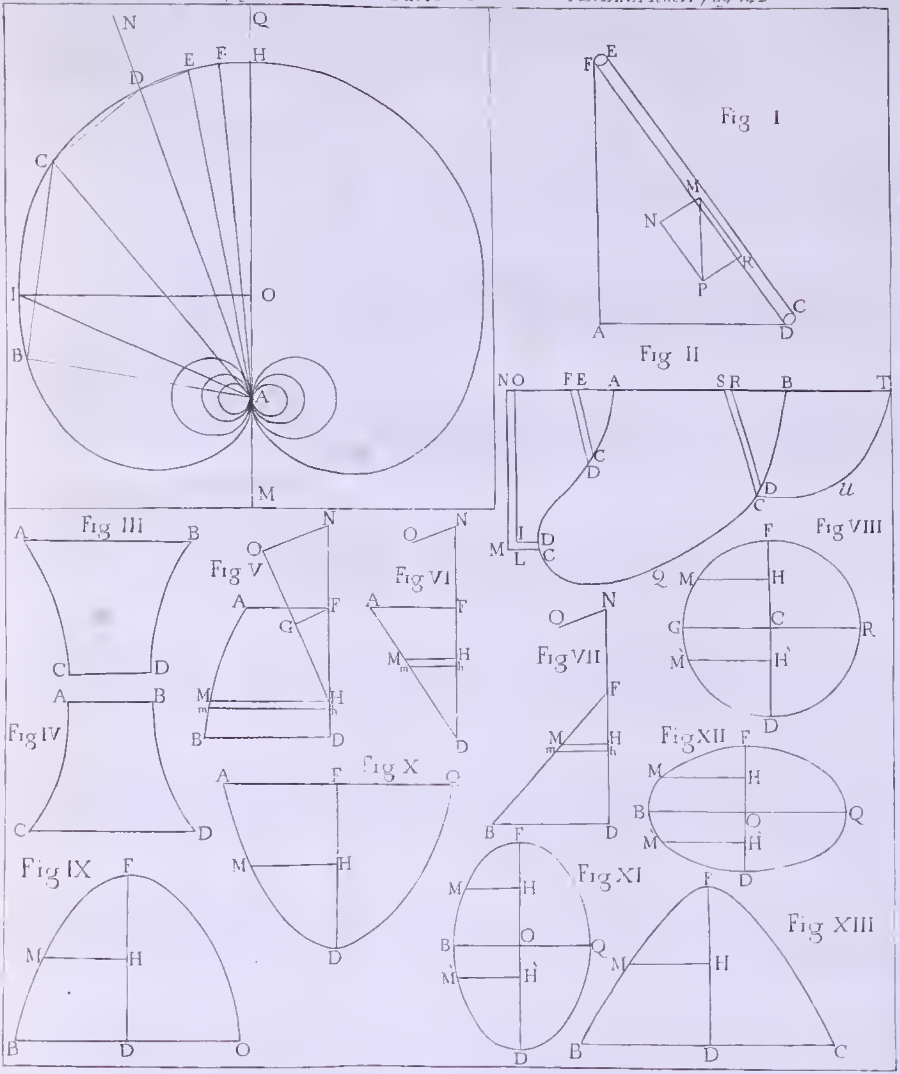


Fig I
Fig II
Fig III
Fig IV
Fig V
Fig VI
Fig VII
Fig VIII
Fig IX
Fig X
Fig XI
Fig XII
Fig XIII

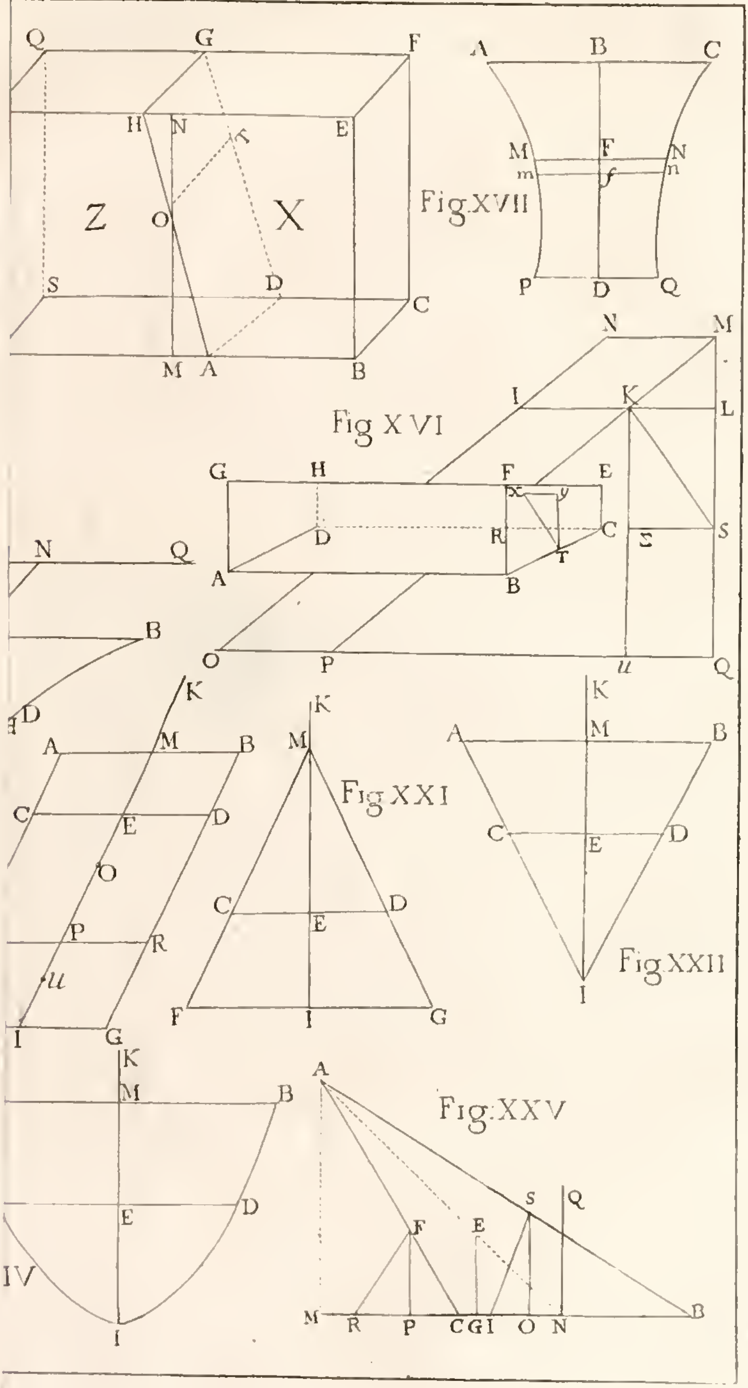


Fig XVII

Fig XVI

Fig XXI

Fig XXII

Fig:XXV

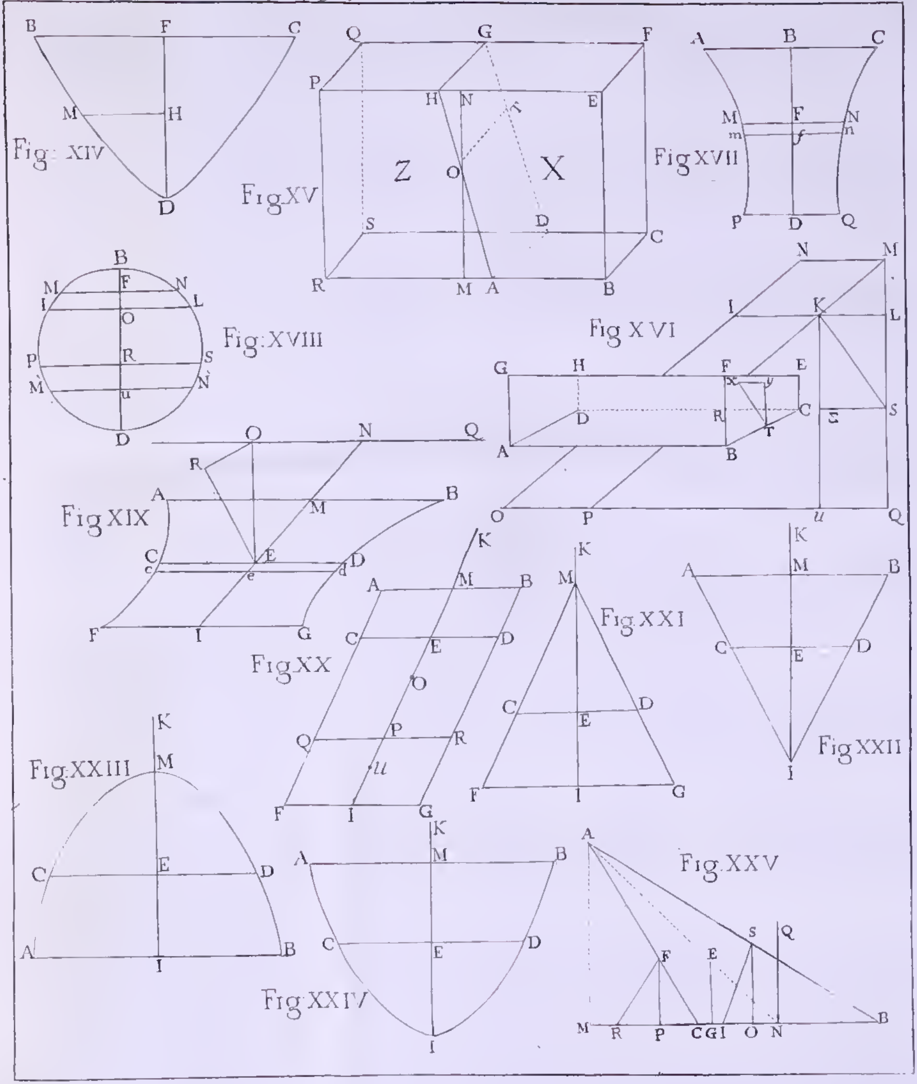


Fig: XIV
Fig XV
Fig XVII
Fig: XVIII
Fig X VI
Fig XIX
Fig XX
Fig XXI
Fig XXII
Fig XXIII
Fig XXIV
Fig XXV

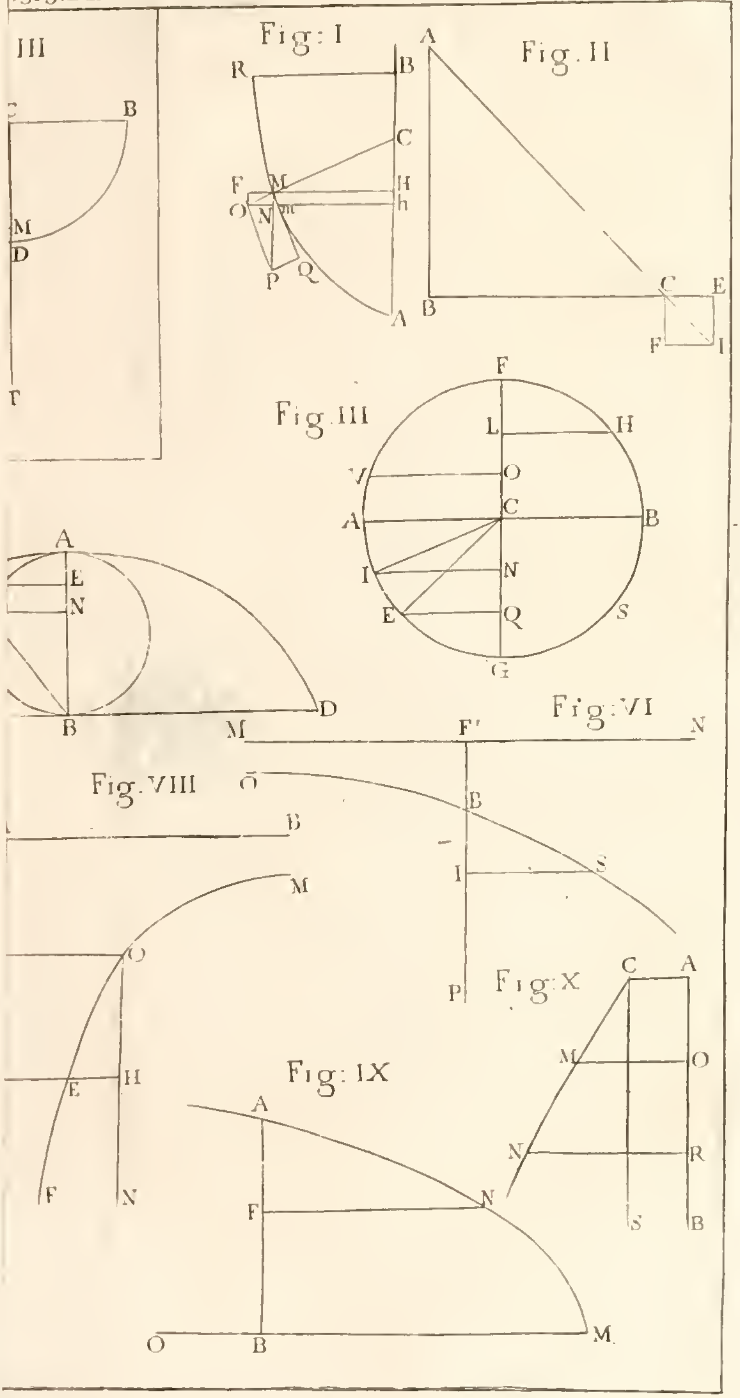


Fig: I
R
B
C
F
M
H
h
O
N
m
P
Q
A
Fig. II
A
B
C
E
F
I
III
C
B
M
D
T
Fig. III
F
L
H
V
O
A
C
B
I
N
E
Q
S
G
A
E
N
B
M
D
Fig: VI
F'
N
Fig. VIII
B
S
I
P
M
O
H
E
F
N
Fig: X
C
A
M
O
N
R
S
B
Fig: IX
A
F
N
O
B
M

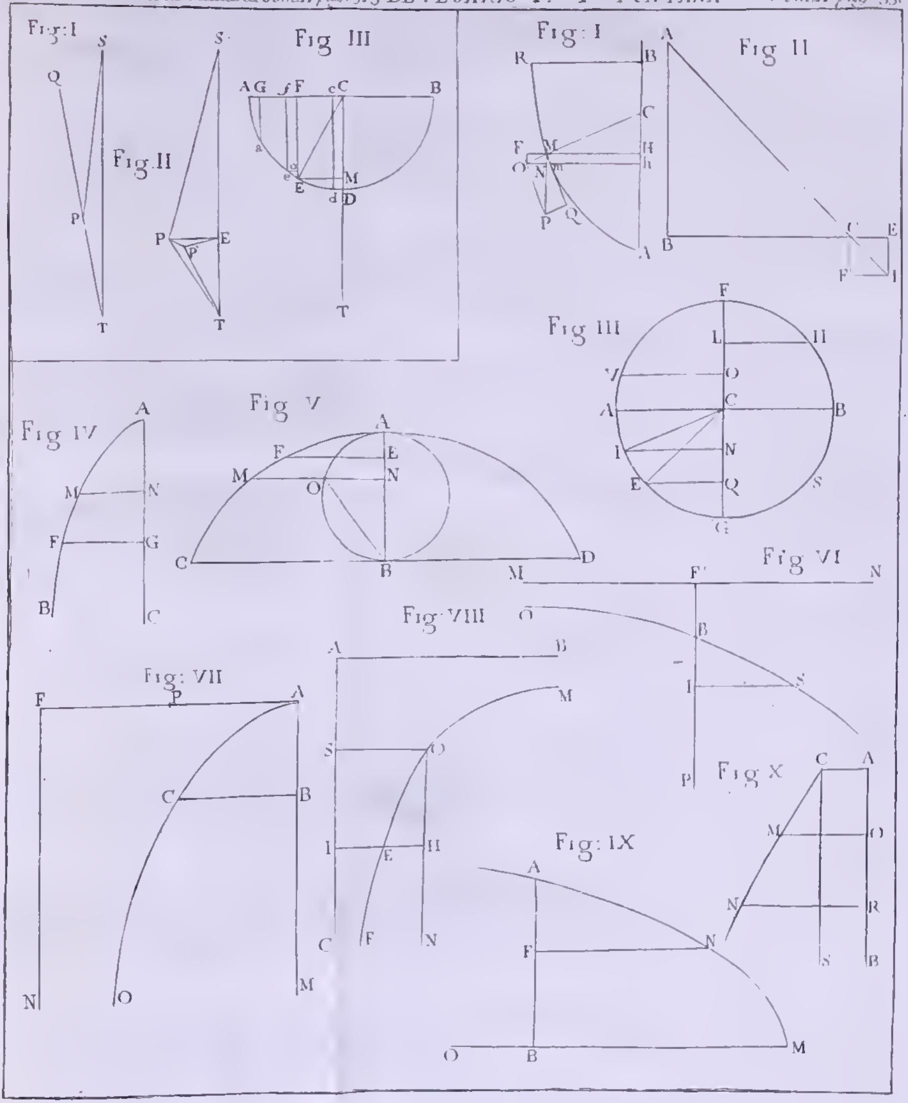
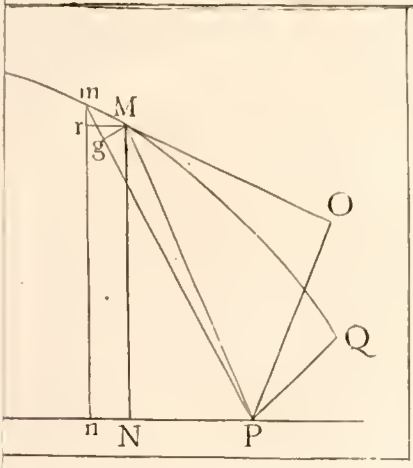


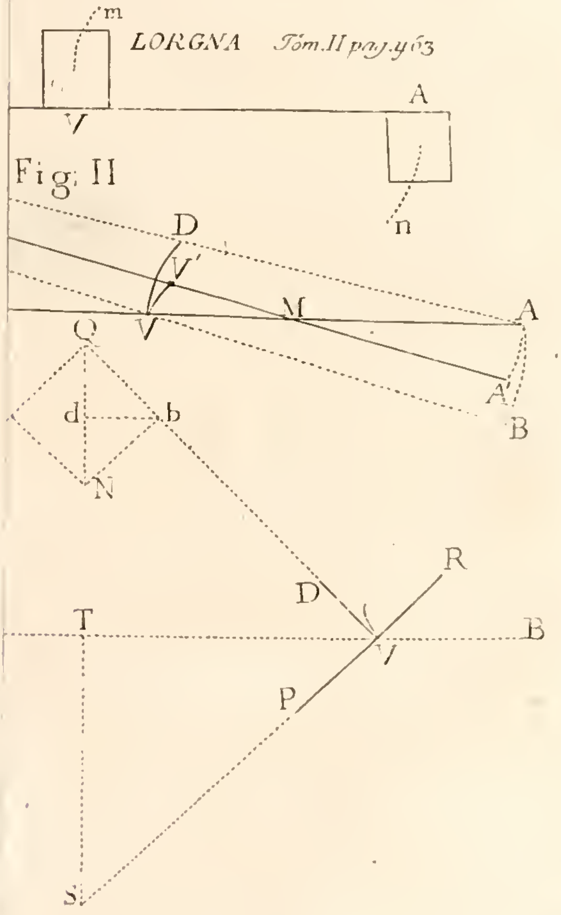
Fig: I
Fig. II
Fig III
Fig: I
Fig II
Fig III
Fig IV
Fig V
Fig VI
Fig: VII
Fig: VIII
Fig: IX
Fig X

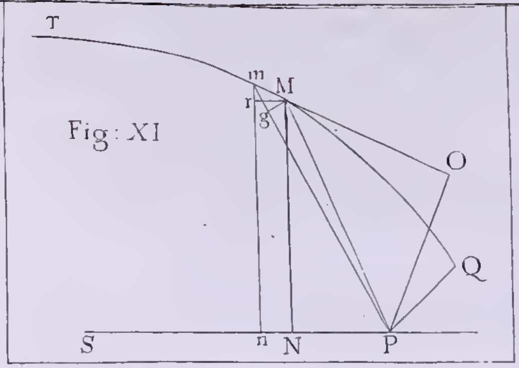
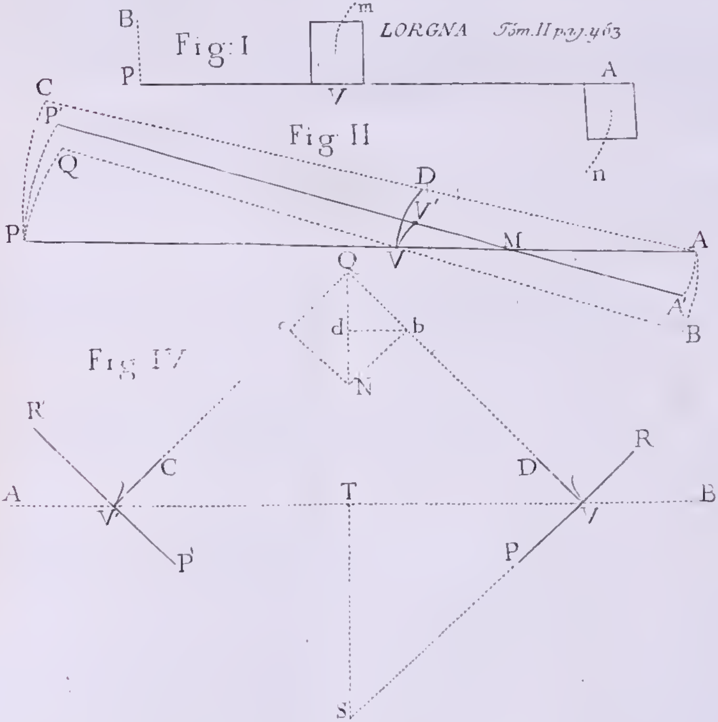
ONTANA Parte I e II



LORGNA *Tom. II pag. 463*

Fig. II





LORGNA Tom.II pag.463